

Matematika A3 építőmérnököknek 4. gyakorlat

Konstans variációs módszer, hiányos másodrendű differenciálegyenletek

Konstans variációs módszer

Konstans variációs módszerrel

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \quad (1)$$

alakú másodrendű, lineáris (akár változó együtthatós) inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását tudjuk előállítani, ahol g tetszőleges folytonos függvény.

A módszer lépései:

1. Állítsuk elő (1) homogén részének általános megoldását $y_h = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ alakban.
2. Ekkor a partikuláris megoldást keressük $y_p = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t)$ alakban (azaz a homogén egyenlet általános megoldásában a c_1, c_2 konstansokat ismeretlen $C_1(t), C_2(t)$ függvényekkel helyettesítjük).
3. Határozzuk meg az ismeretlen függvények deriváltjait ($C_1'(t), C_2'(t)$) az alábbi egyenletrendszer megoldásával:

$$\begin{aligned} C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) &= 0, \\ C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) &= g(t). \end{aligned}$$

4. $C_1'(t), C_2'(t)$ integrálásával megkapjuk $C_1(t), C_2(t)$ függvényeket. Ezekkel felírjuk y_p függvényt és ekkor az (1) egyenlet általános megoldása $y = y_h + y_p$ lesz.

Megjegyzés: A módszer ugyanarra való, mint próbafüggvény-módszer, de ez általánosabb, hiszen változó együtthatós esetben is működik és nem kell $g(t)$ -nek speciális alakúnak lennie. Viszont, ha lehet használni próbafüggvény-módszert, az általában könnyebben számolható.

1. feladat Keressük meg az alábbi egyenlet partikuláris megoldását konstans variációs módszerrel!

$$y'' + y' - 2y = e^{-t}$$

2. feladat Tekintsük az alábbi differenciálegyenletet!

$$t^2 y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 2t^3, \quad t > 0 \quad (2)$$

Ellenőrizzük le, hogy $y_1 = t$ és $y_2 = te^t$ megoldása (2) homogén részének! Adjuk meg az inhomogén egyenlet általános megoldását!

3. feladat Adjuk meg az alábbi egy partikuláris megoldását konstans variációs módszerrel!

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-t} \sin t$$

Hiányos másodrendű differenciálegyenlet

Hiányos másodrendű differenciálegyenletről akkor beszélünk, ha x, y és y' közül valamelyik (akár egyszerre több) nem jelenik meg az egyenletben. Három típussal foglalkozunk részletesebben:

- Ha y és y' is hiányzik: $y'' = f(x)$. Ekkor $y = \int \int f(x) dx dx$.
- Ha y hiányzik: $p(x) = y'(x)$ helyettesítéssel ($y''(x) = p'(x)$) egy elsőrendű egyenletet kapunk $p(x)$ -re. Ezt megoldva $y = \int p(x) dx$.
- Ha x hiányzik: $p(y) = y'$ helyettesítéssel ($y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$) egy elsőrendű differenciálegyenletet kapunk $p(y)$ -ra. Ennek megoldása után $y' = p(y)$ elsőrendű szétválasztható egyenlet megoldása y .

4. feladat Oldjuk meg az $y''y - (y')^2 = 0$ differenciálegyenletet az alábbi kezdeti értékek esetén!

- (a) $y(0) = 0, y'(0) = 3$ (b) $y(0) = 1, y'(0) = 3$ (c) $y(0) = 3, y'(0) = 3$

5. feladat Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát!

$$y'' = 12\sqrt{y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

6. feladat Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát!

$$y'' = -2t(y')^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$$

7. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenletek általános megoldását!

(a) $y'' = e^{2x} + \cos(3x)$

(b) $y'' = 1 + \sin x$

8. feladat Adjuk meg az alábbi egyenlet általános megoldását!

$$y'' = \frac{y'}{x} + x \sin x$$

9. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$(y')^2 + 2yy'' = 0$$

10. feladat Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$y'' = 2y'y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

11. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' + \frac{4}{x}y' = x$$

12. feladat Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2$$

13. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$xy'' = 3y' + x$$

14. feladat Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$y'' = y'e^{-y}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1$$