

Matematika A3 építőmérnököknek 4. gyakorlat

Konstans variációs módszer, hiányos másodrendű differenciálegyenletek

Konstans variációs módszer

Konstans variációs módszerrel

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \quad (1)$$

alakú másodrendű, lineáris (akár változó együtthatós) inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását tudjuk előállítani, ahol g tetszőleges folytonos függvény.

A módszer lépései:

1. Állítsuk elő (1) homogén részének általános megoldását $y_h = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ alakban.
2. Ekkor a partikuláris megoldást keressük $y_p = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t)$ alakban (azaz a homogén egyenlet általános megoldásában a c_1, c_2 konstansokat ismeretlen $C_1(t), C_2(t)$ függvényekkel helyettesítjük).
3. Határozzuk meg az ismeretlen függvények deriváltjait ($C_1'(t), C_2'(t)$) az alábbi egyenletrendszer megoldásával:

$$\begin{aligned} C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) &= 0, \\ C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) &= g(t). \end{aligned}$$

4. $C_1'(t), C_2'(t)$ integrálásával megkapjuk $C_1(t), C_2(t)$ függvényeket. Ezekkel felírjuk y_p függvényt és ekkor az (1) egyenlet általános megoldása $y = y_h + y_p$ lesz.

Megjegyzés: A módszer ugyanarra való, mint próbafüggvény-módszer, de ez általánosabb, hiszen változó együtthatós esetben is működik és nem kell $g(t)$ -nek speciális alakúnak lennie. Viszont, ha lehet használni próbafüggvény-módszert, az általában könnyebben számolható.

1. feladat Keressük meg az alábbi egyenlet partikuláris megoldását konstans variációs módszerrel!

$$y'' + y' - 2y = e^{-t}$$

Megoldásvázlat A 3. gyakorlat 4. feladatában láttuk, hogy a homogén rész általános megoldása

$$y_h = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}.$$

Tehát a partikuláris megoldást $y_p = C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-2t}$ alakban keressük. A megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} C_1'(t)e^t + C_2'(t)e^{-2t} &= 0, \\ C_1'(t)e^t - 2C_2'(t)e^{-2t} &= e^{-t}. \end{aligned}$$

Ebből $C_1'(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}$, $C_2'(t) = -\frac{1}{3}e^t$, amiből $C_1(t) = -\frac{1}{6}e^{-2t}$, $C_2(t) = -\frac{1}{3}e^t$, azaz $y_p = -\frac{1}{2}e^{-t}$.

Megjegyzés: A 3. gyakorlat 4. feladatában ugyanezt kaptuk próbafüggvény-módszerrel.

2. feladat Tekintsük az alábbi differenciálegyenletet!

$$t^2 y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 2t^3, \quad t > 0 \quad (2)$$

Ellenőrizzük le, hogy $y_1 = t$ és $y_2 = te^t$ megoldása (2) homogén részének! Adjuk meg az inhomogén egyenlet általános megoldását!

Megoldásvázlat y_1 és y_2 visszahelyettesítéssel ellenőrizhető. Mivel ezek nem egymás konstansszorosai a homogén egyenlet általános megoldása: $y_h = c_1 t + c_2 te^t$.

A (2) egyenletet el kell osztani t^2 -tel, hogy y'' együtthatója 1 legyen, így $g(t) = 2t$. Így a megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} C_1' t + C_2' te^t &= 0, \\ C_1' + C_2'(e^t + te^t) &= 2t. \end{aligned}$$

Ebből $C_1' = -2$, $C_2' = 2e^{-t}$, amiből $C_1 = -2t$, $C_2 = -2e^{-t}$, azaz $y_p = -2t^2 - 2t$. Itt $-2t$ beolvasztható $c_1 t$ tagba, így az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 t + c_2 te^t - 2t^2.$$

3. feladat Adjuk meg az alábbi egy partikuláris megoldását konstans variációs módszerrel!

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-t} \sin t$$

Megoldásvázlat A 3. gyakorlat 8. feladatából tudjuk, hogy a homogén rész általános megoldása:

$$y_h = c_1 e^{-t} \cos(2t) + c_2 e^{-t} \sin(2t).$$

A konstans variációs módszer során megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} C_1'(t)e^{-t} \cos(2t) + C_2'(t)e^{-t} \sin(2t) &= 0, \\ C_1'(t)(-e^{-t} \cos(2t) - 2e^{-t} \sin(2t)) + C_2'(t)(2e^{-t} \cos(2t) - e^{-t} \sin(2t)) &= e^{-t} \sin t. \end{aligned}$$

Ebből $C_1'(t) = -\sin^2 t \cos t$, $C_2'(t) = \cos^2 t \sin t - \frac{1}{2} \sin t$, amiből

$$C_1(t) = -\frac{1}{3} \sin^3 t, \quad C_2(t) = -\frac{1}{3} \cos^3 t + \frac{1}{2} \cos t,$$

azaz $y_p = e^{-t} \left(-\frac{1}{3} \sin^3 t \cos(2t) + \left(-\frac{1}{3} \cos^3 t + \frac{1}{2} \cos t \right) \sin(2t) \right) = \frac{1}{3} e^{-t} \sin t$, ami megegyezik a 3. gyakorlat 8. feladatában kapott megoldással.

Hiányos másodrendű differenciálegyenlet

Hiányos másodrendű differenciálegyenletről akkor beszélünk, ha x , y és y' közül valamelyik (akár egyszerre több) nem jelenik meg az egyenletben. Három típussal foglalkozunk részletesebben:

- Ha y és y' is hiányzik: $y'' = f(x)$. Ekkor $y = \int \int f(x) dx dx$.
- Ha y hiányzik: $p(x) = y'(x)$ helyettesítéssel ($y''(x) = p'(x)$) egy elsőrendű egyenletet kapunk $p(x)$ -re. Ezt megoldva $y = \int p(x) dx$.
- Ha x hiányzik: $p(y) = y'$ helyettesítéssel ($y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$) egy elsőrendű differenciálegyenletet kapunk $p(y)$ -ra. Ennek megoldása után $y' = p(y)$ elsőrendű szétválasztható egyenlet megoldása y .

4. feladat Oldjuk meg az $y''y - (y')^2 = 0$ differenciálegyenletet az alábbi kezdeti értékek esetén!

- (a) $y(0) = 0, y'(0) = 3$ (b) $y(0) = 1, y'(0) = 3$ (c) $y(0) = 3, y'(0) = 3$

Megoldásvázlat $p(y) = y'$ helyettesítés után

$$\frac{dp}{dy} \cdot p \cdot y - p^2 = 0$$

egyenlet adódik. Ez szétválasztható, általános megoldása $p(y) = c \cdot y$. Így y a $\frac{dy}{dx} = cy$ szétválasztható egyenlet megoldásából adódik, vagyis $y = c_1 e^{cx}$.

- (a) Az $y(0) = 0$ feltételből $c_1 = 0$, így viszont másik feltétel nem teljesülhet, azaz nincs megoldás.
 (b) Kezdeti feltételekből $c_1 = 1, c_2 = 3$, azaz $y = e^{3x}$.
 (c) Kezdeti feltételekből $c_1 = 3, c_2 = 1$, azaz $y = 3e^x$.

5. feladat Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát!

$$y'' = 12\sqrt{y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Megoldásvázlat A $p(y) = y'$ helyettesítés után a $p \cdot p' = 12\sqrt{y}$ szétválasztható egyenletet kapjuk. Ennek az általános megoldása $p = \pm \sqrt{16y^{3/2} + c}$. Kezdeti feltételekből itt $c = 0$. Így y az $y' = \pm 4y^{3/4}$ megoldásából adódik: $y = 0$ (ez teljesíti a kezdeti feltételeket) vagy $y = (x + C)^4$, ahol az $y(0) = 0$ kezdeti feltételből $C = 0$, így $y = x^4$.

6. feladat Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát!

$$y'' = -2t(y')^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$$

Megoldásvázlat A $p(t) = y'(t)$ helyettesítéssel $p' = -2tp^2$ szétválasztható egyenletet kapjuk, aminek az általános megoldása $p(t) = \frac{1}{t^2 - c}$. Az $y'(0) = -1$ kezdeti feltételből $c = 1$.

Ezután az eredeti egyenlet általános megoldása integrálással számolható:

$$y = \int \frac{1}{t^2 - 1} dt = \int \frac{-1}{2(1-t)} + \frac{-1}{2(1+t)} dt = \frac{1}{2}(\ln(1-t) - \ln(1+t)) + C,$$

ahol az $y(0) = 0$ kezdeti feltételből $C = 0$. Tehát a kezdetiérték-probléma megoldása:

$$y = \frac{1}{2}[\ln(1-t) - \ln(1+t)].$$

7. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenletek általános megoldását!

(a) $y'' = e^{2x} + \cos(3x)$

(b) $y'' = 1 + \sin x$

Megoldásvázlat Jobb oldalt kétszer integrálva kapjuk a megoldásokat:

(a) $y = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{9}\cos(3x) + c_1x + c_2$

(b) $y = \frac{x^2}{2} - \sin x + c_1x + c_2$

8. feladat Adjuk meg az alábbi egyenlet általános megoldását!

$$y'' = \frac{y'}{x} + x \sin x$$

Megoldásvázlat A $p(x) = y'(x)$ helyettesítés után p -re elsőrendű lineáris egyenlet adódik:

$$p' = \frac{p}{x} + x \sin x.$$

Ennek az általános megoldása konstans variációs módszerrel: $p(x) = c \cdot x - \cos x \cdot x$. Ezt integrálva

$$y = c_1x^2 - x \sin x - \cos x + c_2.$$

9. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$(y')^2 + 2yy'' = 0$$

Megoldásvázlat A $p(y) = y'$ helyettesítéssel a kapott egyenlet $p^2 + 2yp \cdot p' = 0$, ami átrendezve $p' = -\frac{p}{2y}$, ami szétválasztható. Ennek az általános megoldása $p(y) = c \cdot y^{-\frac{1}{2}}$, azaz $y' = c \cdot y^{-\frac{1}{2}}$. Ez is szétválasztható, amit megoldva megkapjuk az eredeti egyenlet általános megoldását:

$$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = c_1x + c_2.$$

10. feladat Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$y'' = 2y'y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Megoldásvázlat A $p(y) = y'$ helyettesítés után egy szétválasztható egyenletet kapunk $p(y)$ -ra, aminek a megoldása $p(y) = y^2 + c$. A kezdeti feltételeket használva $c = 1$. Az $y' = y^2 + 1$ szétválasztható egyenlet megoldása $y = \tan(x + C)$, ahol az $y(0) = 0$ kezdeti feltételből $C = 0$, azaz $y = \tan x$.

11. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' + \frac{4}{x}y' = x$$

Megoldásvázlat A $p(x) = y'(x)$ helyettesítés után a differenciálegyenlet $p' + \frac{4}{x}p = x$ egy elsőrendű lineáris differenciálegyenlet p -re. A homogén rész általános megoldása $p_h = c \cdot x^{-4}$. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása megkapható konstans variációs módszerrel: $p_{\text{part}} = \frac{x^2}{6}$. Tehát $p(x) = c \cdot x^{-4} + \frac{x^2}{6}$. Ezt integrálva az eredeti egyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 x^{-3} + \frac{x^3}{18} + c_2.$$

12. feladat Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2$$

Megoldásvázlat Az egyenlet megoldható $p(y) = y'$ helyettesítéssel. A helyettesítés után kapott differenciálegyenlet y -ra: $\frac{(y')^2}{2} = 2y^2 + c$, ahol a kezdeti feltételekből $c = -16$. A kapott egyenletet y' -re átrendezve $y' = 2\sqrt{y^2 - 8}$, ami szétválasztható. Ennek a megoldásához használjuk az

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}} du = \operatorname{arccosh}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

nevezetes integrált. Ennek segítségével kapjuk, hogy

$$\operatorname{arccosh}\left(\frac{y}{\sqrt{8}}\right) = 2x + C, \quad \text{azaz} \quad y = \sqrt{8} \cosh(2x + C).$$

Itt az $y(0) = 3$ feltételből $C = \operatorname{arccosh}\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = \frac{\ln 2}{2}$. Így egyszerűsítések után azt kapjuk, hogy a kezdetiérték-probléma megoldása:

$$y = 2e^{2x} + e^{-2x}.$$

Egyszerűbben: Vegyük észre, hogy a feladatban megadott differenciálegyenlet egy konstans együtthatós homogén másodrendű differenciálegyenlet és így sokkal egyszerűbben is megoldható (lásd 3. gyakorlat 2. feladat (a)).

13. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$xy'' = 3y' + x$$

Megoldásvázlat A $p(x) = y'(x)$ helyettesítés után p -re egy elsőrendű lineáris differenciálegyenletet kapunk (átrendezés után): $p' = \frac{3}{x}p + 1$. Ennek az általános megoldása $p = cx^3 - \frac{x}{2}$. Ezt integrálva kapjuk az eredeti egyenlet általános megoldását:

$$y = c_1 x^4 - \frac{x^2}{4} + c_2.$$

14. feladat Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$y'' = y'e^{-y}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1$$

Megoldásvázlat A $p(y) = y'$ helyettesítéssel kapott szétválasztható egyenlet megoldása

$$p(y) = -e^{-y} + c_1.$$

Ezután az $y' = -e^{-y} + c_1$ egyenlet megint szétválasztható, ahol az $\int \frac{1}{-e^{-y} + c_1} dy$ integrálás az $u = e^y$ helyettesítéssel számolható. A kapott megoldás ez alapján

$$\frac{1}{c_1} \ln |c_1 e^y - 1| = x + c_2.$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = e^{-3} - 1$ (ezt az $y' = -e^{-y} + c_1$ egyenletbe helyettesítéssel érdemes számolni) és $c_2 = \frac{3}{e^{-3} - 1}$. Tehát

$$\frac{1}{e^{-3} - 1} \ln |(e^{-3} - 1)e^y - 1| = x + \frac{3}{e^{-3} - 1}.$$