

Matematika A3 építőmérnököknek 5. gyakorlat Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Hiányos másodrendű differenciálegyenletek (ismétlés)

1. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$(y')^2 + 2yy'' = 0$$

2. feladat Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$y'' = 2y'y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Keresünk $x(t)$, $y(t)$ függvényeket, melyek teljesítik az alábbi egyenleteket:

$$a_1x' + b_1x + c_1y' + d_1y = f(t) \quad (1)$$

$$a_2x' + b_2x + c_2y' + d_2y = g(t), \quad (2)$$

ahol a_i, b_i, c_i, d_i adott konstansok, $f(t), g(t)$ adott függvények.

Bevezetjük a D deriválási operátort, ami egy függvényhez a deriváltját rendeli. Azaz $Dx = x'$, $Dy = y'$. Ennek segítségével kiszámolhatjuk az alábbi determinánsokat:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1D + b_1 & c_1D + d_1 \\ a_2D + b_2 & c_2D + d_2 \end{vmatrix}, \quad \alpha = \begin{vmatrix} f(t) & c_1D + d_1 \\ g(t) & c_2D + d_2 \end{vmatrix}, \quad \beta = \begin{vmatrix} a_1D + b_1 & f(t) \\ a_2D + b_2 & g(t) \end{vmatrix}.$$

Ezután megoldjuk a $\Delta x = \alpha$, $\Delta y = \beta$ differenciálegyenleteket. Az így kapott $x(t)$, $y(t)$ megoldásokban szerepelnek különböző választható konstansok. Ezek közül például az $y(t)$ egyenletében szereplő konstansok kifejezhetők az $x(t)$ -ben szereplő konstansokkal, ha visszahelyettesítjük a megoldásokat (1), (2) egyenletek valamelyikébe. Így kapjuk meg a rendszer általános megoldását.

3. feladat Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát!

$$2x' = y' + y, \quad y' = 2x' + 2x, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -2$$

4. feladat Oldjuk meg az $x' = y + e^{2t}$, $y' = x$ differenciálegyenlet-rendszert!

5. feladat Oldjuk meg az $x' + x + y' + 2y = e^t$, $x' + 2x + y' + 4y = 0$ differenciálegyenlet-rendszert!

6. feladat Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatot!

$$x' = 3x - 2y, \quad y' = 2x - 2y, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1$$

7. feladat Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszert!

$$x' + x = y, \quad 2x' = -y' - y$$