

Matematika A3 építőmérnököknek 5. gyakorlat

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Hiányos másodrendű differenciálegyenletek (ismétlés)

1. feladat Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$(y')^2 + 2yy'' = 0$$

Megoldásvázlat A $p(y) = y'$ helyettesítéssel a kapott egyenlet $p^2 + 2yp \cdot p' = 0$, ami átrendezve $p' = -\frac{p}{2y}$, ami szétválasztható. Ennek az általános megoldása $p(y) = c \cdot y^{-\frac{1}{2}}$, azaz $y' = c \cdot y^{-\frac{1}{2}}$. Ez is szétválasztható, amit megoldva megkapjuk az eredeti egyenlet általános megoldását:

$$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = c_1x + c_2.$$

2. feladat Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását!

$$y'' = 2y'y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Megoldásvázlat A $p(y) = y'$ helyettesítés után egy szétválasztható egyenletet kapunk $p(y)$ -ra, aminek a megoldása $p(y) = y^2 + c$. A kezdeti feltételeket használva $c = 1$. Az $y' = y^2 + 1$ szétválasztható egyenlet megoldása $y = \tan(x + C)$, ahol az $y(0) = 0$ kezdeti feltételből $C = 0$, azaz $y = \tan x$.

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Keresünk $x(t)$, $y(t)$ függvényeket, melyek teljesítik az alábbi egyenleteket:

$$a_1x' + b_1x + c_1y' + d_1y = f(t) \quad (1)$$

$$a_2x' + b_2x + c_2y' + d_2y = g(t), \quad (2)$$

ahol a_i, b_i, c_i, d_i adott konstansok, $f(t), g(t)$ adott függvények.

Bevezetjük a D deriválási operátort, ami egy függvényhez a deriváltját rendeli. Azaz $Dx = x'$, $Dy = y'$. Ennek segítségével kiszámolhatjuk az alábbi determinánsokat:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1D + b_1 & c_1D + d_1 \\ a_2D + b_2 & c_2D + d_2 \end{vmatrix}, \quad \alpha = \begin{vmatrix} f(t) & c_1D + d_1 \\ g(t) & c_2D + d_2 \end{vmatrix}, \quad \beta = \begin{vmatrix} a_1D + b_1 & f(t) \\ a_2D + b_2 & g(t) \end{vmatrix}.$$

Ezután megoldjuk a $\Delta x = \alpha$, $\Delta y = \beta$ differenciálegyenleteket. Az így kapott $x(t)$, $y(t)$ megoldásokban szerepelnek különböző választható konstansok. Ezek közül például az $y(t)$ egyenletében szereplő konstansok kifejezhetők az $x(t)$ -ben szereplő konstansokkal, ha visszahelyettesítjük a megoldásokat (1), (2) egyenletek valamelyikébe. Így kapjuk meg a rendszer általános megoldását.

3. feladat Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát!

$$2x' = y' + y, \quad y' = 2x' + 2x, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -2$$

Megoldásvázlat A fenti jelöléseket használva $\Delta = -4D - 2$, $\alpha = \beta = 0$. Így a megoldandó egyenletek (-1 -gyel szorzás után) $4x' + 2x = 0$ és $4y' + 2y = 0$. Ebből $x(t) = C_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$, $y(t) = C_2 \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$. A $2x' = y' + y$ egyenletbe helyettesítésből $C_2 = -2C_1$. A kezdeti értékekből $C_1 = 1$. Így $x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}$ és $y(t) = -2e^{-\frac{1}{2}t}$.

4. feladat Oldjuk meg az $x' = y + e^{2t}$, $y' = x$ differenciálegyenlet-rendszert!

Megoldásvázlat Most $\Delta = D^2 - 1$, $\alpha = 2e^{2t}$, $\beta = e^{2t}$. Így a megoldandó egyenletek

$$x'' - x = 2e^{2t}, \quad y'' - y = e^{2t}.$$

Ebből $x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t}$, $y(t) = C_3e^t + C_4e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}$. Az $y' = x$ egyenletbe helyettesítésből $C_3 = C_1$, $C_4 = -C_2$. Tehát $x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t}$, $y(t) = C_1e^t - C_2e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}$.

5. feladat Oldjuk meg az $x' + x + y' + 2y = e^t$, $x' + 2x + y' + 4y = 0$ differenciálegyenlet-rendszert!

Megoldásvázlat Most $\Delta = D$, $\alpha = 5e^t$, $\beta = -3e^t$. Így a megoldandó egyenletek $x' = 5e^t$, $y' = -3e^t$. Ebből $x(t) = 5e^t + C_1$, $y(t) = -3e^t + C_2$. Az $x' + 2x + y' + 4y = 0$ egyenletbe helyettesítésből $C_2 = -\frac{1}{2}C_1$. Tehát $x(t) = 5e^t + C_1$, $y(t) = -3e^t - \frac{1}{2}C_1$.

6. feladat Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatot!

$$x' = 3x - 2y, \quad y' = 2x - 2y, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1$$

Megoldásvázlat A megoldások: $x(t) = -e^{-t} + 2e^{2t}$, $y(t) = -2e^{-t} + e^{2t}$.

7. feladat Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszert!

$$x' + x = y, \quad 2x' = -y' - y$$

Megoldásvázlat A megoldások:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{(-2+\sqrt{3})t} + C_2 e^{(-2-\sqrt{3})t}, \\ y(t) &= (-1+\sqrt{3})C_1 e^{(-2+\sqrt{3})t} - (1+\sqrt{3})C_2 e^{(-2-\sqrt{3})t}. \end{aligned}$$