

Matematika A3 építőmérnököknek 6. gyakorlat

Kombinatorika, a klasszikus valószínűségi modell

Kombinatorika

	Ismétlés nélküli	Ismétléses
Permutáció	n különböző elemet hányféleképpen lehet sorba rendezni: $P_n = n!$	n elemet hányféleképpen lehet sorba rendezni, ha ezek közül $k_1, k_2, \dots, k_s$ egyforma: $P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_s)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_s!}$
Kombináció	n különböző elemből hányféleképpen lehet k darabot kiválasztani: $C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$	n különböző elemből hányféleképpen lehet k darabot kiválasztani, ha egy elemet többször is választhatunk: $C_n^{k, \text{ism}} = \binom{n+k-1}{k}$
Variáció	n különböző elemből hányféleképpen lehet k darabot kiválasztani, ha a sorrend is számít: $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	n különböző elemből hányféleképpen lehet k darabot kiválasztani, ha a sorrend is számít és egy elemet többször is választhatunk: $V_n^{k, \text{ism}} = n^k$

1. feladat Egy építőmérnök hallgatónak 6 tárgyból kell vizsgáznia a félév végén. Hányféle sorrendben tudhatja le a 6 tárgyat? És hány különböző sorrendben lehetnek a vizsgái, ha tudjuk, hogy az egyik tárgyból háromszor is elment vizsgázni, míg a másik 5 tárgyból csak egyszer-egetyszer?

Megoldásvázlat Az első esetben ismétlés nélküli permutációt használva $6!$. A második esetben ismétléses permutációval $\frac{8!}{3!} = 6720$.

2. feladat A DIFFERENCIÁLEGYENLET szó betűinek összekeverésével hány különböző (nem feltétlenül értelmes) 20 betűs szó készíthető? És a VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS szóból?

Megoldásvázlat A DIFFERENCIÁLEGYENLET esetén a betűk között van 2 db I, 2 db F, 5 db E, 2 db N és 2 db L (a maradék 7 betű egyszer szerepel). Így a lehetséges sorrendek száma (ismétléses permutációval): $\frac{20!}{2! \cdot 2! \cdot 5!}$.

A második esetben a betűk között van 4 darab S, 2 darab Z, 2 darab Í és 2 darab Á (a többi betű egyszer szerepel), így ismétléses permutációval: $\frac{20!}{4! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}$.

3. feladat 10 különböző ízű fagyalt közül hányféleképpen választhatunk 3 gombócot úgy, hogy különböző fajtákat választunk? Hányféle lehetőségünk van, ha tölcsérbe kérjük (vagyis számít, hogy melyik van legalul, középen és felül)? És ha egy ízt akár többször is választhatunk?

Megoldásvázlat Az első esetben 10 különbözőből kell választani 3 különbözőt, így a lehetőségek száma $\binom{10}{3}$ (ismétlés nélküli kombináció).

Tölcsérnél számít a sorrend, így ekkor a lehetőségek száma: $10 \cdot 9 \cdot 8$ (ismétlés nélküli variáció).

Ha egy ízt többször is választhatunk, akkor az első esetben a lehetőségek száma ismétléses kombinációval számolható: $\binom{10+3-1}{3} = \binom{12}{3}$, míg tölcsér esetén ismétléses variációval: 10^3 .

4. feladat Hány olyan háromjegyű szám van, melynek jegyei növekvő sorrendben követik egymást? És hány olyan van, amelynek jegyei csökkenő sorrendben követik egymást?

Megoldásvázlat Egy növekvő jegyű számban 0 nem szerepelhet. A maradék 9 számjegyből akárhogy választunk 3-at, abból pontosan egy megfelelő háromjegyű szám készíthető. Így ismétlés nélküli kombinációval a megfelelő háromjegyű számok száma: $\binom{9}{3}$.

Csökkenő jegyek esetén az előzővel ellentétben a 0-t is használhatjuk. Viszont itt is igaz, hogy akárhogy választunk a 10 számjegyből 3 különbözőt, azokból pontosan egy megfelelő háromjegyű szám készíthető. Vagyis ezek száma: $\binom{10}{3}$.

5. feladat A MATEK A3 első zárthelyire a hallgatók olyan jól felkészültek, hogy mindenki elérte a 40%-ot. 2 darab kettes, 4 darab hármas, 5 darab négyes és 8 darab ötös dolgozat született. Hányféleképpen lehet kiválasztani 5 hallgatót úgy, hogy a jegyeik között szerepeljen mind a négy osztályzat?

Megoldásvázlat 5 hely van, mind a négy osztályzatnak szerepelnie kell, így valamelyikhez 2 hallgató tartozik. Az egyes esetek páronként kizárják egymást, ezért a hozzájuk tartozó lehetőségek számát összeadjuk:

$$\binom{2}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8 + \binom{4}{2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 + \binom{5}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 + \binom{8}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5.$$

Másképp: Először kiválasztunk mindegyik jegyből egy-egy hallgatót, majd a maradék 15-ből még egyet, viszont ekkor minden megfelelő kiválasztást pontosan kétszer számoltunk, így kettővel még el kell osztani:

$$2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2}.$$

Megjegyzés: A második megoldásban erősen használjuk, hogy az egyszerűen adódó $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 15$ választás esetén minden megoldást pontosan kétszer számoltunk. Vegyük észre, hogy ha például 5 helyett 6 hallgatót szeretnénk kiválasztani a fenti feltételekkel, akkor ez a módszer már nem működne: $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 15 \cdot 14$ -ként számolva lennének olyan esetek, amiket 6-szor számoltunk és olyanok is, amiket 8-szor.

6. feladat Egy másik tanszéken véletlenszerűen osztályoznak, csak azt határozzák meg előre, hogy a különböző osztályzatokból hány darabnak kell születnie. Hányféleképpen alakulhatnak a hallgatók jegyei egy 20 fős csoportban, ha minden érdemjegyhez 4-4 hallgatót szeretnének kiválasztani?

Megoldásvázlat $\binom{20}{4} \cdot \binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4}$

7. feladat 12 könyvből 5 matematikával, 2 statikával, 3 hidraulikával és 2 geodéziával foglalkozik. Hányféleképpen lehet a könyveket elhelyezni a könyvespolcon, ha azt szeretnénk, hogy az azonos témával foglalkozó könyvek egymás mellé kerüljenek?

Megoldásvázlat A témákon belül ismétlés nélküli permutációval számolható a sorrendek száma, például a matekkönyveket 5!-féleképpen rendezhetjük. Ezekről függetlenül a témákat is ismétlés nélküli permutációval rakhatjuk sorba 4!-féleképpen. Tehát összesen $5! \cdot 2 \cdot 3! \cdot 2 \cdot 4!$ lehetséges sorrend van.

8. feladat A Palibácsi öt és a Vásárhelyi Klub kilenc tagja közül szeretnénk egy közös pultot kialakítani a BME Egyetemi Napokra, ahol 3 Palibácsis és 4 Vásárhelyi Klubos tag legyen. Hányféleképpen alakítható ki a közös pult, ha a Klubosok között van 2 személy, akik nem hajlandóak egy pultban dolgozni?

Megoldásvázlat A Palibácsis tagokat $\binom{5}{3}$ -féleképpen választhatjuk, míg a Klubosokat $(\binom{9}{4} - \binom{7}{2})$ -féleképpen (hiszen pontosan $\binom{7}{2}$ lehetőség nem jó, azaz ennyi olyan választás van, amiben benne lenne az a két személy, akik nem hajlandók együtt dolgozni). Tehát a pultot $\binom{5}{3} \cdot (\binom{9}{4} - \binom{7}{2})$ -féleképpen alakíthatjuk ki.

Valószínűségszámítás alapjai

Véletlen kísérletek eredményét vizsgáljuk. Lehetséges kimeneteket **elemi eseményeknek** nevezzük, ezek összessége az **eseménytér** (S). Az eseménytér tetszőleges részhalmazát **eseménynek** nevezzük.

Például kockadobásnál az elemi események (a dobás lehetséges eredményei): 1, 2, 3, 4, 5, 6. Az eseménytér: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Események például, hogy párost dobunk: $A = \{2, 4, 6\}$ vagy legfeljebb 2-t dobunk: $B = \{1, 2\}$.

Műveletek eseményekkel:

- **Komplementer** (A^C): A nem következik be
- **Különbség** ($A \setminus B$): A bekövetkezik, B nem
- **Unió** ($A \cup B$): legalább az egyik bekövetkezik
- **Egymást kizáró események:** $A \cap B = \emptyset$
- **Metszet** ($A \cap B$): mindkettő bekövetkezik

A valószínűség alaptulajdonságai: Az A esemény valószínűségét $\mathbb{P}(A)$ -val jelöljük. Minden A eseményre $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$, továbbá $\mathbb{P}(S) = 1$ (ahol S az eseménytér) és $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

- **Komplementer valószínűsége:** $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- **Egymást kizáró események uniója:** ha $A \cap B = \emptyset$, akkor $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ (több egymást kizáró eseményre is általánosítható)
- **Szitaformula:** $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$, illetve 3 eseményre:
 $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$
- **Klasszikus valószínűségi modell:** Ha az S eseménytér véges, és minden elemi esemény **azonos valószínűségű**, akkor

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}.$$

9. feladat Az egyetemisták 28%-a kávézik, 7%-a teázik, 5%-a pedig kávézik és teázik.

- (a) Hány százalékuk nem kávézik és nem is teázik?
 (b) Hány százalékuk teázik, de nem kávézik?

Megoldásvázlat Legyen K az az esemény, hogy egy véletlenül választott egyetemista kávézik és T az az esemény, hogy teázik. Ekkor

- (a) Komplementer esemény valószínűségét és a szitaformulát használva:

$$1 - \mathbb{P}(K \cup T) = 1 - (0.28 + 0.07 - 0.05) = 0.7.$$

- (b) $\mathbb{P}(T \setminus K) = 0.07 - 0.05 = 0.02$

10. feladat Két dobozba 7 golyót teszünk, véletlenszerűen. Mi a valószínűsége, hogy mindkét dobozban lesz golyó?

Megoldásvázlat Összesen 2^7 elemi esemény van, ebből 2 esetben nincs mindkettőben golyó, így a keresett valószínűség: $1 - \frac{2}{2^7}$.

11. feladat Az A urnában 4 zöld és 8 fehér, a B urnában 2 zöld és 3 fehér golyó található. Ha egy-egy golyót kiveszünk a két urnából, mi a valószínűsége, hogy különböző színűek lesznek?

Megoldásvázlat Összes esemény száma $12 \cdot 5 = 60$. Jó események száma $4 \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 28$, azaz a valószínűség $\frac{28}{60} = \frac{7}{15}$.

12. feladat Ha két kockát feldobunk, mi a valószínűsége, hogy a két dobás eltérése legfeljebb 2?

Megoldásvázlat Összesen 36 elemi esemény van. Ebből 12 esetben lesz a különbség nagyobb, mint 2. Így a valószínűség $\frac{2}{3}$.

13. feladat Az 1-től 1000-ig terjedő egész számok közül taláломra kiválasztunk egyet. Mi a valószínűsége, hogy a szám 3-mal vagy 5-tel osztható?

Megoldásvázlat

- 3-mal osztható: $\frac{333}{1000}$
- 5-tel osztható: $\frac{200}{1000}$
- 3-mal vagy 5-tel osztható: $\frac{333+200-66}{1000} = \frac{467}{1000}$

14. feladat Mennyi a valószínűsége, hogy az ötöslottón pontosan két találatunk lesz?

Megoldásvázlat Összesen $\binom{90}{5}$ -féleképpen lehet kiválasztani az 5 számot. Ebből $\binom{5}{2}$ -féleképpen lehet kiválasztani, hogy melyik kettőt találtuk el és $\binom{85}{3}$ -féleképpen, hogy melyik 3-at nem. Tehát a valószínűség:

$$\frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}.$$

15. feladat Anna, Béla, Cecil, Dezső és Emese véletlenszerűen sorba állnak. Mennyi a valószínűsége, hogy

- (a) Anna és Béla egymás mellett áll?
- (b) pontosan egy ember lesz Anna és Béla között?
- (c) pontosan két ember lesz Anna és Béla között?
- (d) pontosan három ember lesz Anna és Béla között?

Megoldásvázlat Összesen $5! = 120$ -féleképpen tudnak sorba állni.

- (a) Annát és Bélát egy emberként kezelve a jó sorrendek száma $4! \cdot 2$, így a valószínűség $\frac{2}{5}$.
- (b) 3-féleképpen tudjuk kiválasztani, hogy ki áll közöttük és ettől függetlenül 2-féleképpen, hogy Anna és Béla közül ki áll előrébb. Ekkor Annát, Bélát és az általuk közrefogott embert egy egységként kezelve $3!$ lehetséges sorrend van. Így a megfelelő sorrendek száma: $3 \cdot 2 \cdot 3! = 36$ és a valószínűség $\frac{36}{120} = \frac{3}{10}$.

Másképp: ha Anna a sor közepén áll, akkor Bélának a sor valamelyik szélén kell állnia, ez 2 lehetőség. Ha Anna nem középen áll, akkor Bélának pontosan 1 megfelelő helye van, ez 4 lehetőség. Ezt a $2 + 4 = 6$ lehetőséget kell szorozni $3!$ -sal, hiszen a másik 3 ember ennyiféle sorrendben állhat. Ebből a valószínűség hasonlóan számolható.

- (c) Most $3 \cdot 2 = 6$ -féleképpen tudjuk kiválasztani, hogy kik álljanak Anna és Béla között (a sorrendet is figyelembe véve). Anna és Béla továbbra is kétféleképpen állhat és most egy 2 szorzó van még amiatt, hogy a négyfős blokk az első négy vagy az utolsó négy helyet foglalja el. Így a megfelelő sorrendek száma: $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ és a valószínűség: $\frac{24}{120} = \frac{1}{5}$.

Másképp: Anna nem állhat középen, minden más esetben Béla helye egyértelmű, így ők 4-féleképpen helyezkedhetnek, amihez $4 \cdot 3!$ megfelelő sorrend tartozik. Ebből a valószínűség hasonlóan számolható.

- (d) Ekkor Anna és Béla a sor két szélén áll (kétféle lehetséges sorrendben) és a közöttük lévő 3 ember $3!$ különböző sorrendben állhat. Így a sorrendek száma: $2 \cdot 3! = 12$, a valószínűség: $\frac{12}{120} = \frac{1}{10}$.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy ha összeadjuk a 4 részfeladatban kapott valószínűségeket, akkor 1-et kapunk: $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = 1$. Ez nem véletlen, hiszen a fenti 4 egymást kizáró esettel lefedtük a teljes eseményteret, vagyis a valószínűségeiket összeadva a teljes eseménytér valószínűségét kapjuk.

16. feladat Két férfi és három nő véletlen sorrendben leül egy padra. Mi a valószínűsége, hogy nemek szerint felváltva ülnek?

Megoldásvázlat $\frac{3! \cdot 2!}{5!} = \frac{1}{10}$.

17. feladat Hatszor dobunk egy szabályos dobókockával. Mennyi a valószínűsége, hogy mind a hat szám előjön?

Megoldásvázlat Összesen 6^6 elemi esemény van. Ebből $6!$ olyan, aminél mindegyik szám előjön, tehát $\frac{6!}{6^6}$.

18. feladat Legalább hány szabályos pénzérmét kell feldobni ahhoz, hogy 90%-nál nagyobb esély legyen arra, hogy lesz köztük fej?

Megoldásvázlat Ha n db érmét dobunk fel, akkor annak a valószínűsége, hogy van köztük fej: $1 - \frac{1}{2^n}$ (komplementer eseményt számolva). Tehát azt a legkisebb n egész számot keressük, amire $1 - \frac{1}{2^n} > 0.9$. Átrendezve $n > \log_2(10)$, vagyis $n \geq 4$.