

Matematika A3 – 1. zárthelyi dolgozat minta

FIGYELEM! A mintazh célja a gyakorlás, illetve a zh várható felépítésének és nehézségi szintjének szemléltetése. **Fontos, hogy az itt szereplő feladattípusok nem fedik le a számonkérhető összes feladattípust!** A tényleges zh-ban bármely tanult témakörből és feladattípusból szerepelhet feladat, akkor is, ha arra a mintazh nem tartalmaz példát.

Tájékoztató a zh-hoz: Munkaidő: **45 perc**. Elérhető pontszám: 42 pont. Sikeres zh feltétele: legalább **30%** (12.6 pont) elérése. Használható segédeszközök: számológép és képletgyűjtemény. Más segédeszköz használata szigorúan tilos! A feladatok megoldását minden esetben megfelelően **indokolni** kell. A puszta végeredmény közlése nem elegendő. A feladatok megoldásához a kurzus során **tanult módszerek** alkalmazását várjuk el. Ettől eltérő módszer csak akkor fogadható el, ha a hallgató annak helyességét részletesen, a kurzus során elsajátított ismeretekre támaszkodva igazolja.

1. Adjuk meg az alábbi kezdetiérték-probléma megoldását! (10 pont)

$$(5 \cos y) dx + (-5x \sin y + 6y) dy = 0, \quad y(0) = 1$$

Megoldás:

- **Egzaktság ellenőrzése (3 pont):**

Legyen $M(x, y) = 5 \cos y$ és $N(x, y) = -5x \sin y + 6y$. Ekkor

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -5 \sin y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -5 \sin y.$$

Mivel ezek megegyeznek, az egyenlet egzakt.

- **M függvény x szerinti integrálása (2 pont):** $F(x, y) = 5x \cos y + c(y)$.

- **A $c(y)$ függvény meghatározása (2 pont):**

Az előző lépésben kapott függvényt y szerint deriválva: $\frac{\partial F}{\partial y} = -5x \sin y + c'(y)$.

Ezt összevetve $N(x, y)$ -nal: $c'(y) = 6y$, tehát $c(y) = 3y^2$.

- **Általános megoldás felírása (1 pont):** $5x \cos y + 3y^2 = C$.

- **A kezdeti feltétel alkalmazása (2 pont):**

Az $y(0) = 1$ feltételből: $5 \cdot 0 \cdot \cos 1 + 3 \cdot 1^2 = C$, vagyis $C = 3$. Vagyis a kezdetiérték-probléma megoldása: $5x \cos y + 3y^2 = 3$.

2. Adjuk meg a következő differenciálegyenlet egyensúlyi megoldásait és jellemezzük azokat stabilitás szempontjából! Vázlatosan ábrázoljuk a megoldásokat! (9 pont)

$$y' = (y + 1) \cdot (y - 3) \cdot (e^y - 1)$$

Megoldás:

- **Az egyensúlyi megoldások meghatározása (2 pont):** $y = -1$ és $y = 3$ egyenként 0.5 pont, $y = 0$ pedig 1 pont

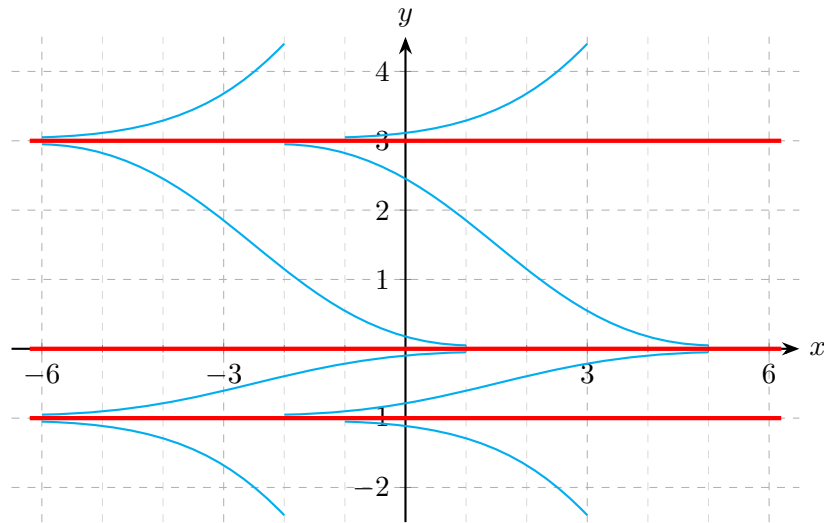
- **Előjelvizsgálat (2 pont):** mind a négy intervallum 0.5 pont

y	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
y'	-	+	-	+

- **Az egyensúlyi megoldások stabilitása (3 pont):** -1 és 3 instabil, 0 aszimptotikusan stabil

- **A megoldások vázlatos ábrázolása (2 pont):**

- a három vízszintes egyensúlyi megoldás: $y = -1$, $y = 0$, $y = 3$
- a többi megoldásgörbe helyes monotonitása az előjelvizsgálatnak megfelelően



1. ábra. Az $y' = (y + 1)(y - 3)(e^y - 1)$ differenciálegyenlet vázlatos megoldásgörbéi

3. Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását (tegyük fel, hogy $x > 0$)! (10 pont)

$$xy'' + y' = 18x^2$$

Megoldás:

- **A helyettesítés bevezetése (2 pont):** $p(x) = y'(x)$, $p'(x) = y''(x)$.
- **A kapott elsőrendű differenciálegyenlet felírása (1 pont):** $p' + \frac{1}{x}p = 18x$.
- **Az elsőrendű egyenlet megoldása (2+2 pont):**
 - Homogén rész általános megoldása: $p_h = c_1 \cdot \frac{1}{x}$
 - Partikuláris megoldást $c(x) \cdot \frac{1}{x}$ alakban keresve, $c'(x) = 18x^2$, vagyis $c(x) = 6x^3$
- **Visszatérés y' -höz (1 pont):** $y' = p = \frac{c_1}{x} + 6x^2$.
- **Az általános megoldás integrálással (2 pont):** $y(x) = c_1 \ln x + 2x^3 + c_2$.

4. Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását! (13 pont)

$$\begin{aligned} x' + x + y' + 2y &= e^t, \\ x' + 2x + y' + 4y &= 0 \end{aligned}$$

Megoldás:

- **Felírás D deriválási operátorral (1 pont):**

$$\begin{aligned} (D + 1)x + (D + 2)y &= e^t, \\ (D + 2)x + (D + 4)y &= 0. \end{aligned}$$

- **Δ kiszámítása (2 pont):** $\Delta = \begin{vmatrix} D + 1 & D + 2 \\ D + 2 & D + 4 \end{vmatrix} = D$.

- α és β meghatározása (2 pont):

$$\alpha = \begin{vmatrix} e^t & D+2 \\ 0 & D+4 \end{vmatrix} = 5e^t, \quad \beta = \begin{vmatrix} D+1 & e^t \\ D+2 & 0 \end{vmatrix} = -3e^t.$$

- Differenciálegyenletek felírása (1 pont): $x' = 5e^t$ és $y' = -3e^t$.
- A kapott differenciálegyenletek megoldása (2 pont):
Integrálással: $x(t) = 5e^t + c_1$ és $y(t) = -3e^t + c_2$.
- Konstansok közötti összefüggés visszahelyettesítéssel (3 pont): $c_2 = -\frac{1}{2}c_1$
- Az általános megoldás megadása (2 pont): $x(t) = 5e^t + c_1$, $y(t) = -3e^t - \frac{1}{2}c_1$.