

Matematika A4 - Valószínűesszámítás 1. gyakorlat

Kombinatorika, a klasszikus valószínűségi modell

Tudnivalók:

- Gyakorlatvezető: Szőke Márton
- Elérhetőségek: Teams: szoke.martonpeter@edu.bme.hu, email: szokemp@math.bme.hu
- Feladatsorok megoldásokkal a Teams csoportban, a fájlok között a „Marci gyak” mappában, illetve a math.bme.hu/~szokemp/matek_a4 oldalon
- Követelmények: 2 ZH, amiken külön-külön legalább 40%-t kell elérni

Kombinatorika

	Ismétlés nélküli	Ismétléses
Permutáció	n különböző elemet hányféleképpen lehet sorba rendezni: $P_n = n!$	n elemet hányféleképpen lehet sorba rendezni, ha ezek közül $k_1, k_2, \dots, k_s$ egyforma: $P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_s)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_s!}$
Kombináció	n különböző elemből hányféleképpen lehet k darabot kiválasztani: $C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$	n különböző elemből hányféleképpen lehet k darabot kiválasztani, ha egy elemet többször is választhatunk: $C_n^{k, \text{ism}} = \binom{n+k-1}{k}$
Variáció	n különböző elemből hányféleképpen lehet k darabot kiválasztani, ha a sorrend is számít: $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	n különböző elemből hányféleképpen lehet k darabot kiválasztani, ha a sorrend is számít és egy elemet többször is választhatunk: $V_n^{k, \text{ism}} = n^k$

1. feladat Egy villamosmérnök hallgatónak 6 tárgyból kell vizsgáznia a félév végén. Hányféle sorrendben tudhatja le a 6 tárgyat? És hány különböző sorrendben lehetnek a vizsgái, ha tudjuk, hogy az egyik tárgyból háromszor is elment vizsgázni, míg a másik 5 tárgyból csak egyszer-egetyszer?

2. feladat Az ENERGIAVÁLSÁG szó betűinek összekeverésével hány különböző (nem feltétlenül értelmes) 13 betűs szó készíthető? És a VALÓSZÍNŰESSZÁMÍTÁS szóból hány 20 betűs?

3. feladat 10 különböző ízű fagyalt közül hányféleképpen választhatunk 3 gombócot úgy, hogy különböző fajtákat választunk? Hányféle lehetőségünk van, ha tölcsérbe kérjük (vagyis számít, hogy melyik van legalul, középen és felül)? És ha egy ízt akár többször is választhatunk?

4. feladat A Matek A4 első zárthelyire a hallgatók olyan jól felkészültek, hogy mindenki elérte a 40%-ot. 2 darab kettes, 4 darab hármas, 5 darab négyes és 8 darab ötös dolgozat született. Hányféleképpen lehet kiválasztani 5 hallgatót úgy, hogy a jegyeik között szerepeljen mind a négy osztályzat?

5. feladat Egy másik tanszéken véletlenszerűen osztályoznak, csak azt határozzák meg előre, hogy a különböző osztályzatokból hány darabnak kell születnie. Hányféleképpen alakulhatnak a hallgatók jegyei egy 20 fős csoportban, ha minden érdemjegyhez 4-4 hallgatót szeretnének kiválasztani?

A klasszikus valószínűségi modell

Véletlen kísérletek eredményét vizsgáljuk. Lehetséges kimeneteket **elemi eseményeknek** nevezzük, ezek összessége az **eseménytér**. Az eseménytér tetszőleges részhalmazát **eseménynek** nevezzük.

Például kockadobásnál az elemi események (a dobás lehetséges eredményei): 1, 2, 3, 4, 5, 6. Az eseménytér: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Események például: $A = \{\text{párost dobunk}\}$, $B = \{\text{a dobás 1 vagy 2}\}$.

Alapfogalmak:

- A és B esemény egymás **komplementere**, ha biztosan az egyik következik be, jel: $B = \bar{A} = A^C$.
- E az A és B **uniója** (vagy összege), ha E pontosan akkor következik be, ha A és B közül legalább az egyik: $E = A + B = A \cup B$.
- F az A és B **metszete** (vagy szorzata), ha F pontosan akkor következik be, ha A és B is bekövetkezik: $F = A \cdot B = A \cap B$.
- G az A és B **különbsége**, ha G pontosan akkor következik be, ha A bekövetkezik, de B nem: $G = A - B = A \setminus B$.
- A és B **egymást kizáró események**, ha egyszerre soha nem következnek be.
- A **maga után vonja** B eseményt, ha A bekövetkezése esetén B is bekövetkezik: $A \subset B$.

Ha egy kísérletet végtelen sokszor megismételhetünk és n_A -val jelöljük azon kísérletek számát, ahányszor A esemény bekövetkezik n kísérletből, akkor $\frac{n_A}{n}$ egy számhoz fog tartani, ezt nevezzük A **valószínűségének**, $\mathbb{P}(A)$ -val jelöljük.

A valószínűség axiómái, alaptulajdonságai

- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ minden A eseményre
- $\mathbb{P}(S) = 1$, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, ahol S az eseménytér
- Ha $A = A_1 + \dots + A_k + \dots$ és $A_i \cdot A_j = \emptyset$ minden $i \neq j$ -re, akkor $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_k) + \dots$
- $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$, ha $A \subset B$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$
- Ha egy kísérletnek véges sok kimenetele lehet és ezek mind azonos valószínűséggel következnek be, akkor egy A esemény valószínűsége:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{A-beli elemi események száma}}{\text{az összes elemi esemény száma}}$$

6. feladat Két dobozba 7 golyót teszünk, véletlenszerűen. Mi a valószínűsége, hogy mindkét dobozban lesz golyó?

7. feladat Egy dobozban van 7 zöld és 4 fehér golyó. Visszatevés nélkül kiveszünk hármat. Mi a valószínűsége, hogy az első kettő zöld és a harmadik fehér lesz?

8. feladat Az A illetve B urnák 4 zöld és 8 fehér illetve 2 zöld és 3 fehér golyót tartalmaznak. Ha egy-egy golyót kiveszünk a két urnából, mi a valószínűsége, hogy különböző színűek lesznek?

9. feladat Ha két kockát feldobunk, mi a valószínűsége, hogy a két dobás eltérése legfeljebb 2?

10. feladat Öt ember, nevezzük őket A, B, C, D, E-nek, véletlenszerűen leül egy padra. Mi a valószínűsége, hogy A balra ül B-től és B balra ül C-től?

11. feladat Az 1-től 1000-ig terjedő számok közül találomra kiválasztunk egyet. Mi a valószínűsége, hogy a szám 3-mal vagy 5-tel osztható?

12. feladat Öt ember, nevezzük őket A, B, C, D, E-nek, véletlenszerűen leül egy padra. Mi a valószínűsége, hogy A és B egymás mellé ül?

13. feladat Két férfi és három nő ül egy padon. Mi a valószínűsége, hogy nemek szerint felváltva ülnek?