

Matematika A4 - Valószínűesszámítás 1. gyakorlat

Kombinatorika, a klasszikus valószínűségi modell

Tudnivalók:

- Gyakorlatvezető: Szőke Márton
- Elérhetőségek: Teams: szoke.martonpeter@edu.bme.hu, email: szokemp@math.bme.hu
- Feladatsorok megoldásokkal a Teams csoportban, a fájlok között a „Marci gyak” mappában, illetve a math.bme.hu/~szokemp/matek_a4 oldalon
- Követelmények: 2 ZH, amiken külön-külön legalább 40%-t kell elérni

Kombinatorika

	Ismétlés nélküli	Ismétléses
Permutáció	n különböző elemet hányféleképpen lehet sorba rendezni: $P_n = n!$	n elemet hányféleképpen lehet sorba rendezni, ha ezek közül $k_1, k_2, \dots, k_s$ egyforma: $P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_s)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_s!}$
Kombináció	n különböző elemből hányféleképpen lehet k darabot kiválasztani: $C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$	n különböző elemből hányféleképpen lehet k darabot kiválasztani, ha egy elemet többször is választhatunk: $C_n^{k, \text{ism}} = \binom{n+k-1}{k}$
Variáció	n különböző elemből hányféleképpen lehet k darabot kiválasztani, ha a sorrend is számít: $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	n különböző elemből hányféleképpen lehet k darabot kiválasztani, ha a sorrend is számít és egy elemet többször is választhatunk: $V_n^{k, \text{ism}} = n^k$

1. feladat Egy villamosmérnök hallgatónak 6 tárgyból kell vizsgáznia a félév végén. Hányféle sorrendben tudhatja le a 6 tárgyat? És hány különböző sorrendben lehetnek a vizsgái, ha tudjuk, hogy az egyik tárgyból háromszor is elment vizsgáznia, míg a másik 5 tárgyból csak egyszer-egetyszer?

Megoldásvázlat Az első esetben ismétlés nélküli permutációt használva $6!$. A második esetben ismétléses permutációval $\frac{8!}{3!} = 6720$.

2. feladat Az ENERGIAVÁLSÁG szó betűinek összekeverésével hány különböző (nem feltétlenül értelmes) 13 betűs szó készíthető? És a VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁS szóból hány 20 betűs?

Megoldásvázlat Az első esetben van 2-2 darab Á, E, G és 1-1 darab A, I, L, N, R, S, V, így $\frac{13!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$.
A második esetben a betűk között van 4 darab S, 2 darab Z, 2 darab Í és 2 darab Á (a többi betű egyszer szerepel), így ismétléses permutációval: $\frac{20!}{4! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}$.

3. feladat 10 különböző ízű fagyalt közül hányféleképpen választhatunk 3 gombócot úgy, hogy különböző fajtákat választunk? Hányféle lehetőségünk van, ha tölcserbe kérjük (vagyis számít, hogy melyik van legalul, középen és felül)? És ha egy ízt akár többször is választhatunk?

Megoldásvázlat Az első esetben 10 különbözőből kell választani 3 különbözőt, így a lehetőségek száma $\binom{10}{3}$ (ismétlés nélküli kombináció).

Tölcsernél számít a sorrend, így ekkor a lehetőségek száma: $10 \cdot 9 \cdot 8$ (ismétlés nélküli variáció).

Ha egy ízt többször is választhatunk, akkor az első esetben a lehetőségek száma ismétléses kombi-nációval számolható: $\binom{10+3-1}{3} = \binom{12}{3}$, míg tölcser esetén ismétléses variációval: 10^3 .

4. feladat A Matek A4 első zárthelyire a hallgatók olyan jól felkészültek, hogy mindenki elérte a 40%-ot. 2 darab kettes, 4 darab hármas, 5 darab négyes és 8 darab ötös dolgozat született. Hányféleképpen lehet kiválasztani 5 hallgatót úgy, hogy a jegyeik között szerepeljen mind a négy osztályzat?

Megoldásvázlat 5 hely van, mind a 4 jegy képviselve kell legyen, így valamelyikhez 2 hallgató tartozik. Ezek egymástól független lehetőségek, így külön-külön összeadódnak:

$$\binom{2}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8 + \binom{4}{2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 + \binom{5}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 + \binom{8}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5.$$

Másképpen: először kiválasztunk mindegyik jegyből egy-egy hallgatót, majd a maradék 15-ből még egyet, viszont ekkor a sorrend miatt kétféleképpen még el kell osztani:

$$2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2}.$$

Megjegyzés: A második megoldásban erősen használjuk, hogy az egyszerűen adódó $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 15$ választás esetén minden megoldást pontosan kétszer számoltunk. Vegyük észre, hogy ha például 5 helyett 6 hallgatót szeretnénk kiválasztani a fenti feltételekkel, akkor ez a módszer már nem működne: $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 15 \cdot 14$ -ként számolva lennének olyan esetek, amiket 4-szer számoltunk és olyanok is, amiket 6-szor.

5. feladat Egy másik tanszéken véletlenszerűen osztályoznak, csak azt határozzák meg előre, hogy a különböző osztályzatokból hány darabnak kell születnie. Hányféleképpen alakulhatnak a hallgatók jegyei egy 20 fős csoportban, ha minden érdemjegyhez 4-4 hallgatót szeretnének kiválasztani?

Megoldásvázlat $\binom{20}{4} \cdot \binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4}$

A klasszikus valószínűségi modell

Véletlen kísérletek eredményét vizsgáljuk. Lehetséges kimeneteket **elemi eseményeknek** nevezzük, ezek összessége az **eseménytér**. Az eseménytér tetszőleges részhalmazát **eseménynek** nevezzük.

Például kockadobásnál az elemi események (a dobás lehetséges eredményei): 1, 2, 3, 4, 5, 6. Az eseménytér: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Események például: $A = \{\text{párost dobunk}\}$, $B = \{\text{a dobás 1 vagy 2}\}$.

Alapfogalmak:

- A és B esemény egymás **komplementere**, ha biztosan az egyik következik be, jel: $B = \overline{A} = A^C$.
- E az A és B **uniója** (vagy összege), ha E pontosan akkor következik be, ha A és B közül legalább az egyik: $E = A + B = A \cup B$.
- F az A és B **metszete** (vagy szorzata), ha F pontosan akkor következik be, ha A és B is bekövetkezik: $F = A \cdot B = A \cap B$.
- G az A és B **különbsége**, ha G pontosan akkor következik be, ha A bekövetkezik, de B nem: $G = A - B = A \setminus B$.
- A és B **egymást kizáró események**, ha egyszerre soha nem következnek be.
- A **maga után vonja** B eseményt, ha A bekövetkezése esetén B is bekövetkezik: $A \subset B$.

Ha egy kísérletet végtelen sokszor megismételhetünk és n_A -val jelöljük azon kísérletek számát, ahányszor A esemény bekövetkezik n kísérletből, akkor $\frac{n_A}{n}$ egy számhoz fog tartani, ezt nevezzük A **valószínűségének**, $\mathbb{P}(A)$ -val jelöljük.

A valószínűség axiómái, alaptulajdonságai

- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ minden A eseményre
- $\mathbb{P}(S) = 1$, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, ahol S az eseménytér
- Ha $A = A_1 + \dots + A_k + \dots$ és $A_i \cdot A_j = \emptyset$ minden $i \neq j$ -re, akkor $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_k) + \dots$
- $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$

- $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$, ha $A \subset B$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$
- Ha egy kísérletnek véges sok kimenetele lehet és ezek mind azonos valószínűséggel következnek be, akkor egy A esemény valószínűsége:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{A\text{-beli elemi események száma}}{\text{az összes elemi esemény száma}}$$

6. feladat Két dobozba 7 golyót teszünk, véletlenszerűen. Mi a valószínűsége, hogy mindkét dobozban lesz golyó?

Megoldásvázlat Összesen 2^7 elemi esemény van, ebből 2 esetben nincs mindkettőben golyó, így a keresett valószínűség: $1 - \frac{2}{2^7}$.

7. feladat Egy dobozban van 7 zöld és 4 fehér golyó. Visszatevés nélkül kiveszünk hármat. Mi a valószínűsége, hogy az első kettő zöld és a harmadik fehér lesz?

Megoldásvázlat

$$\frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9}$$

8. feladat Az A illetve B urnák 4 zöld és 8 fehér illetve 2 zöld és 3 fehér golyót tartalmaznak. Ha egy-egy golyót kiveszünk a két urnából, mi a valószínűsége, hogy különböző színűek lesznek?

Megoldásvázlat Összes esemény száma $12 \cdot 5 = 60$. Jó események száma $4 \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 28$, azaz a valószínűség $\frac{28}{60} = \frac{7}{15}$.

9. feladat Ha két kockát feldobunk, mi a valószínűsége, hogy a két dobás eltérése legfeljebb 2?

Megoldásvázlat Összesen 36 elemi esemény van. Ebből 12 esetben lesz a különbség nagyobb, mint 2. Így a valószínűség $\frac{2}{3}$.

10. feladat Öt ember, nevezzük őket A, B, C, D, E -nek, véletlenszerűen leül egy padra. Mi a valószínűsége, hogy A balra ül B -től és B balra ül C -től?

Megoldásvázlat Összes lehetőség: $5! = 120$. A, B, C sorrendje ismert. D, E hozzájuk képest 4 helyen ülhet. Ebből kettőt (ismétléses kombinációval) $\binom{5}{2} = 10$ -féleképpen lehet kiválasztani. D és E sorrendje miatt mindegyik választáshoz 2 elemi esemény tartozik. Így a valószínűség: $\frac{20}{120} = \frac{1}{6}$.

Megjegyzés: A kért valószínűség úgy is látható, hogy ha észrevesszük, hogy D és E helyét tetszőlegesen rögzítve 6 különböző sorrendben tud leülni a másik 3 ember, de ezek közül pontosan egy esetén ülnek „jó” sorrendben. Vagyis az összes sorrend közül is pontosan minden hatodik sorrend lesz „jó”.

11. feladat Az 1-től 1000-ig terjedő számok közül taláломra kiválasztunk egyet. Mi a valószínűsége, hogy a szám 3-mal vagy 5-tel osztható?

Megoldásvázlat

- 3-mal osztható: $\frac{333}{1000}$
- 5-tel osztható: $\frac{200}{1000}$
- 3-mal vagy 5-tel osztható: $\frac{333+200-66}{1000} = \frac{467}{1000}$

12. feladat Öt ember, nevezzük őket A, B, C, D, E -nek, véletlenszerűen leül egy padra. Mi a valószínűsége, hogy A és B egymás mellé ül?

Megoldásvázlat A -t és B -t egy emberként kezelve a jó leülések száma $4! \cdot 2$, így a valószínűség $\frac{2}{5}$.

13. feladat Két férfi és három nő ül egy padon. Mi a valószínűsége, hogy nemek szerint felváltva ülnek?

Megoldásvázlat $\frac{3! \cdot 2!}{5!} = \frac{1}{10}$.