

Matematika A4 - Valószínűségszámítás 2. gyakorlat

Feltételes valószínűség, szorzási szabály, teljes valószínűség tétele, Bayes-tétel, függetlenség

Feltételes valószínűség

Ha B olyan esemény, melyre $\mathbb{P}(B) \neq 0$, akkor A esemény B eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége azt fejezi ki, hogy azon eseteknek, amikor B bekövetkezik hányad részében következik be A esemény is:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \quad (1)$$

Szorzási szabály:

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2|E_1) \cdot \mathbb{P}(E_3|E_1 \cap E_2) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(E_n|E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}).$$

Teljes valószínűségi tétel: Legyen $B_1, B_2, \dots$ teljes eseményrendszer (azaz bármely kettő metszete üres és lefedik a teljes eseményteret). Ekkor

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2) \cdot \mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3) \cdot \mathbb{P}(B_3) + \dots$$

Bayes-tétel: Legyen $B_1, B_2, \dots$ teljes eseményrendszer. Ekkor

$$\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(B_k) \cdot \mathbb{P}(A|B_k)}{\sum_i \mathbb{P}(B_i) \cdot \mathbb{P}(A|B_i)}.$$

Itt $\mathbb{P}(B_k|A)$ a **posztterior** valószínűség, $\mathbb{P}(A|B_k)$ a **likelihood**, $\mathbb{P}(B_k)$ pedig a **prior** valószínűség.

1. feladat Feldobtunk három kockát. Feltéve, hogy a dobott számok összege 15, mi a valószínűsége, hogy van köztük hatos?

2. feladat Egyszerre feldobunk két szabályos dobókockát. Mennyi a valószínűsége, hogy dobunk kettést? És mennyi a valószínűsége, hogy dobunk kettést, feltéve, hogy a két dobott szám összege hat?

3. feladat Egy bizonyos országban születettek 89%-a éri meg a 60 éves kort és 57%-a éri meg a 80 évet. Mi a valószínűsége, hogy egy 60 éves ember megéri a 80 évet?

4. feladat Az ikrek lehetnek egy- illetve kétpetéjűek. Általában az ikrek egyharmada egypetéjű, ők természetesen egyneműek; a kétpetéjű ikreknél tegyük fel, hogy mindhárom lehetőség egyenlő valószínűséggel áll fenn. Mindezek alapján mi a valószínűsége, hogy egy születendő ikerpár mindkét tagja fiú?

5. feladat A zsebemben három pénzérme van. Egy köztük olyan, mellyel 0.5 valószínűséggel, a két másik 0.6 – 0.6 valószínűséggel dobok fejet. Találomra kivesszem az egyik pénzérmét és háromszor feldobom.

(a) Mi a valószínűsége, hogy mindhárom dobás fej lesz?

(b) Feltéve, hogy mindhárom dobás fej lett, mi a valószínűsége, hogy a szabályos érmével dobtam?

Függetlenség

A és B esemény, melyre $0 < \mathbb{P}(B) < 1$, független, ha

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^C).$$

$\mathbb{P}(B) = 0$ vagy $\mathbb{P}(B) = 1$ esetén A és B mindig független.

Tétel: A és B pontosan akkor független, ha $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

Tétel: $A_1, A_2, A_3, \dots$ események sorozata pontosan akkor teljesen független, ha minden k -ra és $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ -ra

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

6. feladat Legyenek az A , B és C események teljesen függetlenek és legyen $P(A) = P(B) = 1/3$, $P(C) = 1/4$. Határozza meg az $AB + AC$ esemény valószínűségét!

7. feladat Egy érmét háromszor feldobunk. Jelentse A azt az eseményt, hogy legfeljebb egy fejet dobtunk és B azt, hogy fejet és írást is dobtunk. Függetlenek-e az A és B események?

8. feladat Vizsgáljuk meg az alábbi példákban, hogy a megadott A , B és C események függetlenek-e páronként, illetve teljesen.

- (a) Egy szabályos érmét kétszer feldobunk. Legyen A az az esemény, hogy az első dobás eredménye fej, B az az esemény, hogy a második dobás eredménye fej, és C az az esemény, hogy a két dobás eredménye egyezik.
- (b) Feldobunk egy szabályos dobókockát, legyen A az az esemény, hogy a dobás eredménye 4-nél nem nagyobb, B az az esemény, hogy a dobás eredménye 4-nél nem kisebb, és $C = B$.

9. feladat Egy spam-szűrő program úgy működik, hogy a spamekben gyakran előforduló szavakat figyeli. Tegyük fel, hogy az emailek 80%-a spam. A spamek 10%-ában az „ingyen” szó előfordul, míg ugyanez a szó a rendes email-eknek csupán 1%-ában olvasható. Egy most érkezett email-ben az „ingyen” szó olvasható. Mi a valószínűsége, hogy az spam?

10. feladat Egy dobozból, melyben 1 piros és 4 fehér golyó található, kivesszük egyet és anélkül, hogy megnézném, eldobom. Mi a valószínűsége, hogy ezután pirosat húzok?

11. feladat Két kockát feldobok. Mi a valószínűsége, hogy különbözőket dobtam, feltéve, hogy dobtam hatost?

12. feladat Egy érmét háromszor feldobunk. Feltéve, hogy van fej a dobások között, mi a valószínűsége, hogy írás is van?

13. feladat Van a zsebünkben egy szabályos és egy olyan pénzérme, amelynek mindkét oldala fej. Kivesszük az egyiket és feldobjuk kétszer, az eredmény mindkét esetben fej. Mi a valószínűsége, hogy a hamissal dobtunk?

14. feladat Három szakács, A , B és C , egy speciális süteményt sütnek, melyek azonban sajnos rendre 0.02, 0.03, 0.05 valószínűséggel nem kelnek meg rendesen a három szakács keze alatt. Az étteremben ahol dolgoznak, A süti a sütemények 50%-át, B a 30%-át, C pedig a 20%-át. Ha a sütemény, amit eszünk, rossz, mi a valószínűsége, hogy A sütötte?

15. feladat Egy televíziós vetélkedőn az alábbi történik: Van három ajtó, amiből egy mögött egy értékes új autó, a másik kettő mögött pedig egy-egy kecske található. Kiválasztok egy ajtót, majd a műsorvezető kinyit egy másikat, ami mögött kecske van. Ezután megváltoztathatom a döntésemet vagy maradhatok az eredetileg kiválasztott ajtónál. Érdemes-e váltanom?

16. feladat Egy pakli francia kártyából annyiszor húzunk, amennyit dobunk egy szabályos kockával. Mi a valószínűsége, hogy

- (a) nem húzunk pikket, feltéve hogy hármast dobtunk?
- (b) nem húzunk pikket?
- (c) mind a négy színből húzunk?
- (d) hogy 6-ost dobtunk, feltéve, hogy mind a négy ászat kihúztuk?