

Matematika A4 - Valószínűségszámítás 2. gyakorlat

Feltételes valószínűség, szorzási szabály, teljes valószínűség tétele, Bayes-tétel, függetlenség

Feltételes valószínűség

Ha B olyan esemény, melyre $\mathbb{P}(B) \neq 0$, akkor A esemény B eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége azt fejezi ki, hogy azon eseteknek, amikor B bekövetkezik hányad részében következik be A esemény is:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \quad (1)$$

Szorzási szabály:

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2|E_1) \cdot \mathbb{P}(E_3|E_1 \cap E_2) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(E_n|E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}).$$

Teljes valószínűségi tétel: Legyen $B_1, B_2, \dots$ teljes eseményrendszer (azaz bármely kettő metszete üres és lefedik a teljes eseményteret). Ekkor

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2) \cdot \mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3) \cdot \mathbb{P}(B_3) + \dots$$

Bayes-tétel: Legyen $B_1, B_2, \dots$ teljes eseményrendszer. Ekkor

$$\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(B_k) \cdot \mathbb{P}(A|B_k)}{\sum_i \mathbb{P}(B_i) \cdot \mathbb{P}(A|B_i)}.$$

Itt $\mathbb{P}(B_k|A)$ a **poszterior** valószínűség, $\mathbb{P}(A|B_k)$ a **likelihood**, $\mathbb{P}(B_k)$ pedig a **prior** valószínűség.

1. feladat Feldobtunk három kockát. Feltéve, hogy a dobott számok összege 15, mi a valószínűsége, hogy van köztük hatos?

Megoldásvázlat Legyen $A = \{\text{dobtunk 6-ost}\}$, $B = \{\text{az összeg 15}\}$. Ekkor

$$\mathbb{P}(B) = \frac{10}{216}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{9}{216}, \quad \text{így} \quad \mathbb{P}(A|B) = \frac{9}{10}.$$

2. feladat Egyszerre feldobunk két szabályos dobókockát. Mennyi a valószínűsége, hogy dobtunk kettést? És mennyi a valószínűsége, hogy dobtunk kettést, feltéve, hogy a két dobott szám összege hat?

Megoldásvázlat Legyen A az az esemény, hogy dobtunk kettést, B pedig, hogy a két dobott szám összege hat! Ekkor a feltétel nélkül a valószínűség: $\mathbb{P}(A) = \frac{11}{36}$.

A feltételes esetben (1) egyenlet alapján számolhatunk. Összesen 5 olyan elemi esemény van, amikor az összeg hat, ebből 2 olyan, amikor volt közte kettés, így a feltételes valószínűség:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{2/36}{5/36} = \frac{2}{5}.$$

Megjegyzés: Ahogy itt is látszódik, feltételes valószínűséget úgy is számolhatunk, hogy megnézzünk, hogy hány elemi esemény esik bele a B feltételbe (a fenti példában 5) és ezek közül hány esik bele az A eseménybe is (a fenti példában 2). Ekkor a feltételes valószínűség ezek hányadosával egyenlő.

3. feladat Egy bizonyos országban születettek 89%-a éri meg a 60 éves kort és 57%-a éri meg a 80 évet. Mi a valószínűsége, hogy egy 60 éves ember megéri a 80 évet?

Megoldásvázlat Legyen A , illetve B az az esemény, hogy valaki megéri a 60, illetve a 80 évet. Ekkor $\mathbb{P}(A) = 0.89$, $\mathbb{P}(B) = 0.57$. Tudjuk, hogy $B \subset A$ (azaz $A \cap B = B$), így $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \approx 0.64$.

4. feladat Az ikrek lehetnek egy- illetve kétpetejűek. Általában az ikrek egyharmada egypetejű, ők természetesen egyneműek; a kétpetejű ikreknél tegyük fel, hogy mindhárom lehetőség egyenlő valószínűséggel áll fenn. Mindezek alapján mi a valószínűsége, hogy egy születendő ikerpár mindkét tagja fiú?

Megoldásvázlat Definiáljuk az alábbi eseményeket:

$$A = \{\text{egy ikerpár egypetejű}\}, \quad B = \{\text{egy ikerpár kétpetejű}\}, \quad C = \{\text{egy ikerpár mindkét tagja fiú}\}.$$

Ekkor $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(C|A) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(C|B) = \frac{1}{3}$. Teljes valószínűség tétele szerint

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C|A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C|B) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{7}{18}.$$

5. feladat A zsebemben három pénzérme van. Egy köztük olyan, mellyel 0.5 valószínűséggel, a két másikkal 0.6 – 0.6 valószínűséggel dobok fejet. Találomra kivesszem az egyik pénzérmét és háromszor feldobom.

(a) Mi a valószínűsége, hogy mindhárom dobás fej lesz?

(b) Feltéve, hogy mindhárom dobás fej lett, mi a valószínűsége, hogy a szabályos érmével dobtam?

Megoldásvázlat Legyen

$$A = \{\text{szabályos érmét vettem ki}\}, \quad B = \{\text{cinkelt érmét vettem ki}\}, \quad C = \{\text{mindhárom dobás fej}\}.$$

Ekkor $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(C|A) = 0.5^3 = \frac{1}{8}$, $\mathbb{P}(C|B) = 0.6^3 = \frac{27}{125}$.

(a) Teljes valószínűség tétele szerint $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C|A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C|B) \cdot \mathbb{P}(B) \approx 0.19$.

(b) Bayes-tétellel $\mathbb{P}(A|C) = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C|A)}{\mathbb{P}(C)} \approx 0.22$.

Függetlenség

A és B esemény, melyre $0 < \mathbb{P}(B) < 1$, független, ha

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^C).$$

$\mathbb{P}(B) = 0$ vagy $\mathbb{P}(B) = 1$ esetén A és B mindig független.

Tétel: A és B pontosan akkor független, ha $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

Tétel: $A_1, A_2, A_3, \dots$ események sorozata pontosan akkor teljesen független, ha minden k -ra és $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ -ra

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

6. feladat Legyenek az A , B és C események teljesen függetlenek és legyen $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/3$, $\mathbb{P}(C) = 1/4$. Határozza meg az $AB + AC$ esemény valószínűségét!

Megoldásvázlat Szita formulát használva $A \cap B$ és $A \cap C$ eseményekre, majd kihasználva a teljes függetlenséget (azaz metszetek valószínűsége a valószínűségek szorzata):

$$\mathbb{P}(AB + AC) = \mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(AC) - \mathbb{P}(AB \cap AC) = \mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(AC) - \mathbb{P}(ABC) = \frac{1}{9} + \frac{1}{12} - \frac{1}{36} = \frac{1}{6}.$$

7. feladat Egy érmét háromszor feldobunk. Jelentse A azt az eseményt, hogy legfeljebb egy fejet dobtunk és B azt, hogy fejet és írást is dobtunk. Függetlenek-e az A és B események?

Megoldásvázlat A lehetséges esetek összeszámolásával $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{8}$. Vagyis $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ teljesül, így függetlenek.

8. feladat Vizsgáljuk meg az alábbi példákban, hogy a megadott A , B és C események függetlenek-e páronként, illetve teljesen.

- (a) Egy szabályos érmét kétszer feldobunk. Legyen A az az esemény, hogy az első dobás eredménye fej, B az az esemény, hogy a második dobás eredménye fej, és C az az esemény, hogy a két dobás eredménye egyezik.
- (b) Feldobunk egy szabályos dobókockát, legyen A az az esemény, hogy a dobás eredménye 4-nél nem nagyobb, B az az esemény, hogy a dobás eredménye 4-nél nem kisebb, és $C = B$.

Megoldásvázlat

- (a) Mindhárom esemény valószínűsége $\frac{1}{2}$ és bármelyik kettő metszetének valószínűsége $\frac{1}{4}$. Tehát páronként függetlenek. Viszont a hármas metszet valószínűsége is $\frac{1}{4}$, vagyis teljesen nem függetlenek.
- (b) $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$. Noha $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$, de mégsem teljesen függetlenek, hiszen páronként sem azok (pl. B és C esetén ez nyilvánvaló).

9. feladat Egy spam-szűrő program úgy működik, hogy a spamekben gyakran előforduló szavakat figyel. Tegyük fel, hogy az emailek 80%-a spam. A spamek 10%-ában az „ingyen” szó előfordul, míg ugyanez a szó a rendes email-eknek csupán 1%-ában olvasható. Egy most érkezett email-ben az „ingyen” szó olvasható. Mi a valószínűsége, hogy az spam?

Megoldásvázlat Legyen $A = \{\text{az email spam}\}$, $B = \{\text{szerepel az „ingyen” szó}\}$. Ekkor $\mathbb{P}(A) = 0.8$, $\mathbb{P}(B|A) = 0.1$, $\mathbb{P}(B|A^C) = 0.01$. Így Bayes-tétellel

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(A^C) \cdot \mathbb{P}(B|A^C)} = \frac{0.08}{0.08 + 0.002} \approx 0.98.$$

10. feladat Egy dobozból, melyben 1 piros és 4 fehér golyó található, kivesszük egyet és anélkül, hogy megnézném, eldobom. Mi a valószínűsége, hogy ezután pirosat húzok?

Megoldásvázlat Második csak akkor lehet piros, ha az első fehér, ennek a valószínűsége $4/5$. Ha az első fehér, akkor a második $1/4$ valószínűséggel piros. Így szorzási szabály szerint annak a valószínűsége, hogy a második piros az $1/5$.

11. feladat Két kockát feldobok. Mi a valószínűsége, hogy különbözőket dobtam, feltéve, hogy dobtam hatost?

Megoldásvázlat 11 olyan elemi esemény van, amikor dobtunk hatost, ebből 10 esetben a dobások különbözők. Így a keresett valószínűség $\frac{10}{11}$.

12. feladat Egy érmét háromszor feldobunk. Feltéve, hogy van fej a dobások között, mi a valószínűsége, hogy írás is van?

Megoldásvázlat 7 olyan elemi esemény van, amikor dobtunk fejet, ebből 6 esetben dobtunk írást is. Így a keresett valószínűség $\frac{6}{7}$.

13. feladat Van a zsebünkben egy szabályos és egy olyan pénzérme, amelynek mindkét oldala fej. Kivesszük az egyiket és feldobjuk kétszer, az eredmény mindkét esetben fej. Mi a valószínűsége, hogy a hamissal dobtunk?

Megoldásvázlat Legyen A az az esemény, hogy a szabálytalan érmével dobálunk és B az az esemény, hogy mindkét dobás fej. Ekkor Bayes-tételt használva

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{1/2}{1/2 + 1/8} = \frac{4}{5}.$$

14. feladat Három szakács, A , B és C , egy speciális süteményt sütnek, melyek azonban sajnos rendre 0.02, 0.03, 0.05 valószínűséggel nem kelnek meg rendesen a három szakács keze alatt. Az étteremben ahol dolgoznak, A süti a sütemények 50%-át, B a 30%-át, C pedig a 20%-át. Ha a sütemény, amit eszünk, rossz, mi a valószínűsége, hogy A sütötte?

Megoldásvázlat Legyen $R = \{\text{rosszul sikerült}\}$, A, B, C pedig értelemszerűen az az esemény, hogy a megfelelő szakács sütötte. Ekkor a feladat szövege alapján:

$$\mathbb{P}(A) = 0.5, \quad \mathbb{P}(B) = 0.3, \quad \mathbb{P}(C) = 0.2, \quad \mathbb{P}(R|A) = 0.02, \quad \mathbb{P}(R|B) = 0.03, \quad \mathbb{P}(R|C) = 0.05.$$

Így a Bayes-tétellel:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A|R) &= \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(R|A)}{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(R|A) + \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(R|B) + \mathbb{P}(C) \cdot \mathbb{P}(R|C)} \\ &= \frac{0.5 \cdot 0.02}{0.5 \cdot 0.02 + 0.3 \cdot 0.03 + 0.2 \cdot 0.05} \approx 0.345 \end{aligned}$$

15. feladat Egy televíziós vetélkedőn az alábbi történik: Van három ajtó, amiből egy mögött egy értékes új autó, a másik kettő mögött pedig egy-egy kecske található. Kiválasztok egy ajtót, majd a műsorvezető kinyit egy másikat, ami mögött kecske van. Ezután megváltoztathatom a döntésemet vagy maradhatok az eredetileg kiválasztott ajtónál. Érdemes-e váltanom?

Megoldásvázlat Eredetileg $\frac{1}{3}$ eséllyel találtam el az autót rejtő ajtót. Mivel a műsorvezető mindig ki tud választani a másik kettő közül olyan ajtót, ami mögött kecske van, az eredetileg választott ajtó mögött továbbra is $\frac{1}{3}$ valószínűséggel van az autó. Ez viszont azt is jelenti, hogy $\frac{2}{3}$ valószínűséggel a másik ajtó mögött van az autó. Tehát érdemes változtatni a döntésen.

Érdemes úgy is átgondolni, hogy eredetileg $\frac{2}{3}$ eséllyel egy kecskét rejtő ajtót választottunk. Ezekben az esetekben viszont a műsorvezető a másik kecskét rejtő ajtót fogja kinyitni, így ilyenkor mindig a másik ajtó rejti az autót.

Megjegyzés: A feladatban leírt problémát Monty Hall-paradoxonnak is hívják. Részletesebb leírás található itt: https://hu.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall-paradoxon.

16. feladat Egy pakli francia kártyából annyiszor húzunk, amennyit dobunk egy szabályos kockával. Mi a valószínűsége, hogy

- (a) nem húzunk pikket, feltéve hogy hármast dobtunk?
- (b) nem húzunk pikket?
- (c) mind a négy színből húzunk?
- (d) hogy 6-ost dobtunk, feltéve, hogy mind a négy ászat kihúztuk?

Megoldásvázlat Legyen $D_k = \{k\text{-ast dobtunk}\}$, $k = 1, 2, \dots, 6$.

- (a) Három lap húzása esetén összesen $\binom{52}{3}$ elemi eseményünk van, melyek közül $\binom{39}{3}$ esetben nincs pikk. Így a kért valószínűség:

$$\mathbb{P}(\text{nincs pikk} | D_3) = \mathbb{P}(3 \text{ kártyából nincs pikk}) = \frac{\binom{39}{3}}{\binom{52}{3}}.$$

- (b) D_k , $k = 1, 2, \dots, 6$ események teljes eseményrendszert alkotnak. Így teljes valószínűség tételével:

$$\mathbb{P}(\text{nincs pikk}) = \sum_{k=1}^6 \mathbb{P}(\text{nincs pikk} | D_k) \cdot \mathbb{P}(D_k) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 \frac{\binom{39-k}{3}}{\binom{52}{3}}.$$

- (c) Ahhoz, hogy mindegyik színből húzhassunk legalább 4-et kell dobni a kockával. Így teljes valószínűség tételével:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{minden szín}) &= \sum_{k=4}^6 \mathbb{P}(\text{minden szín} | D_k) \cdot \mathbb{P}(D_k) \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{13^4}{\binom{52}{4}} + \frac{4 \cdot \binom{13}{2} \cdot 13^3}{\binom{52}{5}} + \frac{4 \cdot \binom{13}{3} \cdot 13^3 + \binom{4}{2} \binom{13}{2}^2 \cdot 13^2}{\binom{52}{6}} \right). \end{aligned}$$

- (d) Legyen A az az esemény, hogy mind a 4 ászt kihúztuk. Természetesen megint legalább 4 lapot kell húznunk. Vegyük észre, hogy

$$\mathbb{P}(A \mid D_4) = \frac{1}{\binom{52}{4}}, \quad \mathbb{P}(A \mid D_5) = \frac{\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}}, \quad \mathbb{P}(A \mid D_6) = \frac{\binom{48}{2}}{\binom{52}{6}}.$$

Így Bayes-tétellel a kért valószínűség az alábbi módon számolható:

$$\mathbb{P}(D_6 \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid D_6) \cdot \mathbb{P}(D_6)}{\sum_{k=4}^6 \mathbb{P}(A \mid D_k) \cdot \mathbb{P}(D_k)}.$$