

Matematika A4 - Valószínűesszámítás 3. gyakorlat

Valószínűégi változók, súlyfüggvény, nevezetes diszkrét eloszlások

Valószínűégi változók

A **valószínűégi változók** az eseménytérén értelmezett függvények. Egy X valószínűégi változó **diszkrét**, ha csak véges sok vagy megszámlálhatóan végtelen sok értéket vehet fel. Ennek a **súlyfüggvénye** az a p_X függvény, amire $p_X(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$, ahol $x_1, x_2, \dots$ az X változó lehetséges értékei.

Azt mondjuk, hogy az X és Y valószínűégi változók **függetlenek**, ha $\{X \in A\}, \{Y \in B\}$ események függetlenek minden $A, B \subseteq \mathbb{R}$ halmazra.

Nevezetes eloszlások

Bernoulli: X Bernoulli eloszlású p paraméterrel, ha egy p valószínűséggel sikeres kísérlet eredményét jellemzi, azaz p valószínűséggel 1, $1 - p$ valószínűséggel 0 az értéke. Jelölés: $X \sim \text{BER}(p)$.

Binomiális: Ha egy kísérletet n -szer végzünk el egymástól függetlenül, ahol a siker valószínűsége p és X jelöli a sikeres kísérletek számát, akkor X eloszlása binomiális n, p paraméterekkel. Jelölés: $X \sim \text{BIN}(n, p)$ vagy $X \sim \text{B}(n, p)$. A súlyfüggvénye $k = [0, n]$ -ben maximális.

Ha $X \sim \text{BIN}(n, p)$, akkor n darab, független $\text{BER}(p)$ eloszlású valószínűégi változó összege.

Poisson: Sok, kis valószínűségű, független kísérletből a sikeresek számát Poisson eloszlású valószínűégi változóval jellemezhetjük. Ha a sikeres kísérletek várható száma λ , akkor X valószínűégi változó eloszlása λ -paraméterű Poisson eloszlás. Jelölés: $X \sim \text{POI}(\lambda)$. A súlyfüggvénye $k = [0, \infty)$ -ban maximális. Ha n elég nagy és p kicsi, akkor $\text{BIN}(n, p)$ jól közelíthető $\text{POI}(np)$ eloszlással.

Geometriai: Egy kísérletet végezzünk el végtelen sokszor úgy, hogy a kísérletek egymástól függetlenek. Ha X a kísérletek száma az első sikerig (a sikert is beleszámítva), akkor X geometriai eloszlású p paraméterrel, ahol p egy kísérlet sikerességének valószínűsége. Jelölés: $X \sim \text{GEO}(p)$.

Negatív binomiális: Ha X azt adja meg, hogy mikor következik be az r -edik sikeres kísérlet, akkor X negatív binomiális eloszlású p és r paraméterekkel. Jelölés: $X \sim \text{NB}(p, r)$.

Hipergeometriai: Van N termékünk, amiből M hibás. Kihúzzunk n -et, és legyen X a kihúzott hibásak száma. Ekkor X hipergeometriai eloszlású N, M, n paraméterekkel. Jelölés: $X \sim \text{HGEO}(N, M, n)$.

X eloszlása	lehetséges értékek	$p_X(k)$ súlyfüggvény
$\text{BER}(p)$	$k = 0, 1$	$p_X(0) = 1 - p, p_X(1) = p$
$\text{BIN}(n, p)$	$k = 0, 1, \dots, n$	$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$
$\text{POI}(\lambda)$	$k = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$
$\text{GEO}(p)$	$k = 1, 2, 3, \dots$	$(1 - p)^{k-1} \cdot p$
$\text{NB}(p, r)$	$k = r, r + 1, \dots$	$\binom{k-1}{r-1} p^r (1 - p)^{k-r}$
$\text{HGEO}(N, M, n)$	$\max(0, n - N + M) \leq k \leq \min(n, M)$	$\frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

1. feladat Egy adóhatóság a cégek 5%-át vizsgálja meg évente teljesen véletlenszerűen. Mi a valószínűsége, hogy egy adott céget öt év alatt

(a) legalább egyszer megvizsgálják?

(b) legalább kétszer megvizsgálják?

2. feladat Egy 400 oldalas könyvben 200 db sajtóhiba található. Mennyi a valószínűsége, hogy a 13. oldalon egynél több hiba lesz? Indokoljuk meg a használt modellt!

3. feladat Tegyük fel, hogy egy egyetem 2400 hallgatója éjjel-nappal kétóránként ellenőrzi az email-jét és egy ellenőrzés 1 percet vesz igénybe (tehát $1/120$ annak a valószínűsége, hogy egy adott hallgató éppen az emailjével van elfoglalva). Mi a közelítő valószínűsége, hogy éppen 19, 20 vagy 21 hallgató ellenőrzi az emailjét?

4. feladat Egy sportlövő 0.9 valószínűséggel lő 10-est. Egy lövéssorozat 10 lövésből áll és akkor elfogadható számára, ha legalább 9 tizes találat van benne. Mi a valószínűsége, hogy három lövéssorozat mindegyike elfogadható lesz?

5. feladat A roulette keréken 38 szám van: 1-től 36-ig, 0 és dupla 0. Ha Kovács úr mindig arra fogad, hogy az eredmény 1-től 12-ig terjed, mi a valószínűsége, hogy

- (a) Kovács úr elveszti az első öt fogadását,
- (b) először a negyedik fogadáson nyer?

6. feladat Egy társasjátékban két kockával dobok egyszerre. Egy olyan mezőre kerültem, ahonnan csak akkor tudok továbblépni, ha a dobott számok között szerepel a hatos. Mekkora valószínűséggel tudok két próbálkozáson belül továbblépni?

7. feladat Az AB-negatív vércsoport gyakorisága 1% . Ha 100 embert véletlenszerűen kiválasztunk, akkor

- (a) mi a közelítő valószínűsége (Poisson eloszlást használva), hogy közülük legalább egynek a vércsoportja AB-negatív?
- (b) mi a pontos valószínűsége, hogy közülük legalább egynek a vércsoportja AB-negatív?

8. feladat Hétközben (hétfőtől péntekig) 0.25 valószínűséggel késik a reggeli vonat.

- (a) Mi a valószínűsége, hogy hétközben legfeljebb két napon késik?
- (b) Legyen jó hét az, amelyen legfeljebb két napon késik. Mi a valószínűsége, hogy 4 hétből legalább 3 hét jó hét lesz?

9. feladat Az A érme feldobásakor 0.4 valószínűséggel kapunk fejet, a B érme feldobásakor ugyanez a valószínűség 0.7 . A két érme közül egyet véletlenszerűen kiválasztunk és 10-szer feldobjuk.

- (a) Függetlenek-e a dobások kimenetelei egymástól?
- (b) Mi a valószínűsége, hogy pontosan 7 dobás lesz fej?
- (c) Feltéve, hogy az első dobás fej, mi a valószínűsége, hogy az A érmevel dobunk?
- (d) Feltéve, hogy az első dobás fej, mi a valószínűsége, hogy összesen 7 dobás lesz fej?

10. feladat Átlagosan hány mazsolának kell egy sütiben lennie, ha azt kívánjuk elérni, hogy egy véletlenszerűen választott sütiben legalább 99% eséllyel legyen (legalább egy szem) mazsola?

11. feladat Egy futóversenyt sajnos kullancsok fertőzött területen át vezettek. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban egy, 75-en pedig két kullancsot. Ennek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen.

12. feladat Egy osztályban 22 tanuló van. Egy órára 8-an nem készültek, és 7-en felelnek. Adjuk meg a készületlen felelők számának eloszlását! Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 2 készületlen felelő lesz?