

Matematika A4 - Valószínűesszámítás 4. gyakorlat

Diszkrét valószínűségi változók jellemzői, folytonos valószínűségi változók

Diszkrét valószínűségi változók jellemzői

- **Várható érték:** $\mathbb{E}(X) = \sum x_i \cdot p(x_i)$, ahol X összes lehetséges x_i értékére összegzünk
- **Variancia** vagy **szórásnégyzet:** $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$
- **Szórás:** $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$

Tulajdonságok:

- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(cX) = c \cdot \mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(g(X)) = \sum_i g(x_i) \cdot p(x_i)$, $\text{Var}(cX) = c^2 \text{Var}(X)$
- Ha X és Y független: $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$, $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

Nevezetes eloszlások várható értéke, szórása

X eloszlása	$\text{BER}(p)$	$\text{BIN}(n, p)$	$\text{POI}(\lambda)$	$\text{GEO}(p)$
$\mathbb{E}(X)$	p	np	λ	$1/p$
$\text{Var}(X)$	$p(1-p)$	$np(1-p)$	λ	$(1-p)/p^2$

1. feladat Egy családban addig születik gyerek, amíg az fiú nem lesz vagy a gyerekek száma el nem éri a hármat. Mi a gyerekek várható száma és szórása egy ilyen családban?

Megoldásvázlat Legyen X a gyerekek száma! Ekkor $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{4}$. Így $\mathbb{E}(X) = \frac{7}{4}$, $\mathbb{E}(X^2) = \frac{15}{4}$, $\text{Var}(X) = \frac{11}{16}$, $\mathbb{D}(X) = \frac{\sqrt{11}}{4}$.

2. feladat A magyar kártyából kiveszünk két lapot. Adjuk meg a kihúzott piros lapok számának négyzetének várható értékét! (A magyar kártyában 32 lap van, ebből 8 piros.)

Megoldásvázlat Legyen X a kihúzott piros lapok száma! Ekkor

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{\binom{24}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{69}{124}, \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{24 \cdot 8}{\binom{32}{2}} = \frac{48}{124}, \quad \mathbb{P}(X = 2) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{7}{124}.$$

$$\text{Így } \mathbb{E}(X^2) = 0^2 \cdot \frac{69}{124} + 1^2 \cdot \frac{48}{124} + 2^2 \cdot \frac{7}{124} = \frac{19}{31}.$$

3. feladat Tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 1)$ és $\mathbb{E}(X) = 3 \cdot \text{Var}(X)$. Mennyi $\mathbb{P}(X = 0)$?

Megoldásvázlat Legyen $p = \mathbb{P}(X = 1)$. Ekkor a $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 1)$ feltételből következik, hogy $X \sim \text{BER}(p)$. Így az $\mathbb{E}(X) = 3 \cdot \text{Var}(X)$ egyenletből $p = 3p(1-p)$, vagyis $p = \frac{2}{3}$ vagy $p = 0$, azaz $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{3}$ vagy $\mathbb{P}(X = 0) = 1$.

4. feladat Egy erdei séta után a rajtunk található kullancsok száma Poisson eloszlású, 0.01 várható értékkel. Mi a valószínűsége, hogy 5 erdei séta során összesen egy kullancsot találunk magunkon?

Megoldásvázlat Használjuk, hogy független Poisson eloszlású valószínűségi változók összege is Poisson eloszlású, ahol az összeg paramétere a paraméterek összege. Így, ha 1 erdei séta alatt a kullancsok számának eloszlása $\text{POI}(0.01)$, akkor 5 erdei séta alatt $\text{POI}(0.05)$. Így a keresett valószínűség $0.05 \cdot e^{-0.05} \approx 0.048$.

5. feladat Egy X valószínűségi változóról azt tudjuk, hogy $\mathbb{E}(X) = 1$ és $\mathbb{D}^2(X) = 5$. Határozzuk meg a következő mennyiségeket!

(a) $\mathbb{E}[(2 + X)^2]$ (b) $\mathbb{D}^2(4 + 3X)$

Megoldásvázlat A várható érték és a szórásnégyzet tulajdonságai alapján kiszámolhatóak:

(a) $\mathbb{E}[(2 + X)^2] = \mathbb{E}(4 + 4X + X^2) = \mathbb{E}(4) + \mathbb{E}(4X) + \mathbb{E}(X^2) = 4 + 4\mathbb{E}(X) + (\mathbb{D}^2(X) + (\mathbb{E}(X))^2) = 4 + 4 + 6 = 14$

(b) $\mathbb{D}^2(4 + 3X) = \mathbb{D}^2(3X) = 9\mathbb{D}^2(X) = 45$

Folytonos valószínűségi változók

Sűrűségfüggvény: $\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x) dx$ minden $B \subseteq \mathbb{R}$ halmazra.

Tulajdonságai: $f(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

Eloszlásfüggvény: $F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

Tulajdonságai: monoton nő, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, egy oldalról folytonos.

Megjegyzés: Ha egy X folytonos valószínűségi változónak az eloszlásfüggvénye $F(x)$, a sűrűségfüggvénye pedig $f(x)$, akkor tetszőleges $a < b$ esetén annak a valószínűsége, hogy X ezek közötti értéket vesz fel:

$$\mathbb{P}(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Folytonos valószínűségi változó **várható értéke:** $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$.

Szórásnégyzete: $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$, ahol $\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx$.

6. feladat Eloszlásfüggvények-e az alábbi függvények?

$$(a) F(x) = \begin{cases} 1 + e^{1-x}, & \text{ha } x > -1 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases} \quad (b) F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & \text{ha } x \geq 0 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Megoldásvázlat

(a) Nem, mert $x > -1$ esetén monoton csökken.

(b) Ellenőrizhető, hogy F monoton nő, folytonos, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ és $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$. Így F egy eloszlásfüggvény.

Megjegyzés: A (b) részben szereplő függvény az 1 paraméterű exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye. Exponenciális eloszlással az 5. gyakorlaton foglalkozunk részletesebben.

7. feladat Lehetnek-e az alábbi függvények eloszlásfüggvények? Ha igen, számoljuk ki a várható értéket!

$$(a) F(x) = \begin{cases} 2 - \frac{2}{x+1}, & \text{ha } x \geq 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (b) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{x}{4} \cdot (4 - x), & \text{ha } 0 < x \leq 2, \\ 1, & \text{ha } x > 2. \end{cases}$$

Megoldásvázlat

(a) Végtelenben 2-höz tart, így nem lehet eloszlásfüggvény.

(b) Szükséges tulajdonságok ellenőrizhetők, ez egy eloszlásfüggvény. Várható értékhez először deriválással meghatározzuk a sűrűségfüggvényt: $f(x) = F'(x) = 1 - \frac{x}{2}$, ha $x \in (0, 2)$ (egyébként $f(x) = 0$). Így

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^2 x - \frac{x^2}{2} dx = \frac{2}{3}.$$

8. feladat Egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f(x) = cx(1-x)$, ha $x \in (0, 1)$, egyébként az értéke 0. Mennyi a c konstans értéke? Mi az X várható értéke?

Megoldásvázlat $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ egyenletből $c = 6$

Definíció alapján a várható érték $\frac{1}{2}$.

9. feladat Legyen X sűrűségfüggvénye $f(x) = c \cdot x \cdot e^{-x}$ ha $0 < x < \infty$ és 0 egyébként! Milyen c -re lesz ez egy sűrűségfüggvény? Ekkor mi az eloszlásfüggvény? Mennyi $\mathbb{E}(X)$?

Megoldásvázlat Parciális integrálással $c = 1$ adódik.

$$F(x) = \int_0^x t \cdot e^{-t} dt = 1 - (1+x) \cdot e^{-x}, \text{ ha } x > 0 \text{ (egyébként } 0).$$

Definíció alapján (parciális integrálást használva) azt kapjuk, hogy $\mathbb{E}(X) = 2$.

10. feladat Tekintsük az $f(x) = \begin{cases} cx^2, & \text{ha } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$ függvényt, ahol c ismeretlen konstans.

- (a) Mennyi a c értéke, ha az f egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye?
- (b) Számítsuk ki a $\mathbb{P}(X \geq 0.5)$ valószínűséget!
- (c) Számítsuk ki az $\mathbb{E}(X)$ és $\mathbb{E}(X^2)$ várható értékeket!
- (d) Határozzuk meg az eloszlásfüggvényt!

Megoldásvázlat

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ egyenletből $c = 3$.

(b) $P(X \geq 0.5) = \int_{0.5}^{\infty} f(x) dx = \frac{7}{8}$.

(c) Definíció alapján $\mathbb{E}(X) = \frac{3}{4}$, $\mathbb{E}(X^2) = \frac{3}{5}$.

(d) Definíció alapján $F(x) = 0$, ha $x \leq 0$ és $F(x) = 1$, ha $x > 1$. Ha $x \in (0, 1]$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_0^x 3t^2 dt = x^3.$$

11. feladat Egy ℓ hosszúságú ropit találmányra választott pontban ketté törünk. Mi az így keletkezett darabok közül a rövidebbiknek az eloszlásfüggvénye?

Megoldásvázlat Határozzuk meg tetszőleges x esetén az eloszlásfüggvény értékét! Triviálisan a rövidebb darab hossza 0 és $\ell/2$ közé fog esni. Így

$$F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ 1, & \text{ha } x > \frac{\ell}{2}, \end{cases}$$

Ha pedig $x \in (0, \ell/2]$, akkor pontosan akkor lesz a rövidebb darab hossza kisebb, mint x , ha a töréspont a ropi valamelyik végétől legfeljebb x távolságra van. Ennek valószínűsége $2x/\ell$. Így az eloszlásfüggvény

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{2x}{\ell}, & \text{ha } x \in (0, \frac{\ell}{2}] \\ 1, & \text{ha } x > \frac{\ell}{2}, \end{cases}$$

azaz a rövidebb darab hossza egyenletes eloszlású a $(0, \frac{\ell}{2})$ intervallumon (egyenletes eloszlásról részletesebben az 5. gyakorlaton tanulunk).

12. feladat Egy benzinkút hetente egyszer kap benzint. Ha a heti eladás (ezer literben mérve) egy valószínűségi változó

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4, & \text{ha } x \in (0, 1), \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel, akkor mekkora méretű tartály szükséges ahhoz, hogy egy adott héten a benzinkút 0.01 valószínűséggel fogyjon ki a benzintől?

Megoldásvázlat Legyen X a kereslet és T a keresett tartályméret. Ekkor $\mathbb{P}(T < X) = 0.01$. Integrálással adódik, hogy $(1-T)^5 = 0.01$, amiből $T = 1 - \sqrt[5]{0.01} \approx 0.6$.