

Matematika A4 - Valószínűségszámítás 5. gyakorlat

Nevezetes folytonos eloszlások, Poisson-folyamat

Nevezetes folytonos eloszlások

X eloszlása	jelölés	lehetséges értékek	$f(x)$	$F(x)$	$\mathbb{E}(X)$	$\text{Var}(X)$
Egyenletes	$\text{UNI}(a, b)$	$x \in [a, b]$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
Exponenciális	$\text{EXP}(\lambda)$	$x \geq 0$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda x}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$

Az exponenciális eloszlás fontos tulajdonsága az **örökifjúság**: $\mathbb{P}(X > s+t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$.

1. feladat Egy információs vonalnál a várakozási idő percben mérve exponenciális eloszlású $\frac{1}{3}$ paraméterrel. Ha már 2 perce várakozom, akkor mi a valószínűsége, hogy a következő percben sorra kerülök?

2. feladat Tudjuk, hogy a busz 10:00 és 10:30 közötti egyenletes időben érkezik a megállóba, ezért 10:00-ra a megállóba megyünk.

- Mi a valószínűsége, hogy legalább 10 percet kell a buszra várnunk?
- Ha 10:15-kor még mindig várjuk a buszt, mi a valószínűsége, hogy még legalább 10 percet fogunk a buszra várni?

3. feladat Annak valószínűsége, hogy egy telefonbeszélgetés legalább 5 percig tart, 0.3. Mennyi a valószínűsége, hogy 10 perc után is tart még?

4. feladat Egy adott területen a földrengések erejei egymástól független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók, melynek paramétere $\frac{5}{12}$ a Richter skálán. Mi a valószínűsége, hogy a következő

- földrengés ereje meghaladja a 4-et?
- két földrengés egyike sem lesz 4-nél erősebb?

5. feladat Egy büfébe érkező szállítmány időpontjának (X) várható értéke 3 óra, szórása $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

- Mikor valószínűbb, hogy a szállítmány 2 előtt érkezik meg: akkor ha $X \sim \text{EXP}(\lambda)$ vagy akkor ha $X \sim \text{UNI}(a, b)$? Mekkora ez a valószínűség?
- Tegyük fel, hogy $X \sim \text{UNI}(a, b)$. Ha 3-ig nem érkezett meg az áru, mi a valószínűsége, hogy 4 után fog?

6. feladat A buszmegállóba érkezésemkor megtudom, hogy az előző busz már legalább 3 perce elment. Mi a valószínűsége, hogy 5 percen belül megérkezik a buszom, ha a buszok követési ideje exponenciális eloszlású, 10 perc várható értékkel?

7. feladat Egy örökifjú tulajdonságú villanykörteknél $2/3$ annak a valószínűsége, hogy 2000 óránál többet üzemel. Egy városban 100 ilyen égőt helyeztünk el. Mennyi a valószínűsége, hogy 1000 óra elteltével éppen 60 fog világítani?

Poisson-folyamat

- Véletlen időpontban érkező ismétlődő eseményeket modellez
- Két érkezés közötti idő eloszlása $\text{EXP}(\lambda)$ valamilyen λ -val
- t hosszú idő alatt bekövetkező érkezések számának eloszlása $\text{POI}(\lambda \cdot t)$
- Az n -edik érkezésig eltelt idő eloszlása $\text{Erlang}(n, \lambda)$, aminek eloszlásfüggvénye $t > 0$ esetén:

$$F(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

8. feladat Egy buszmegállóban annak valószínűsége, hogy a következő t percen belül jön busz, $1 - e^{-\frac{t}{8}}$.

- (a) Mi annak a valószínűsége, hogy több mint 10 percet kell várakoznunk?
- (b) Mi annak a valószínűsége, hogy több mint 5 percet, de kevesebb mint 10 percet kell várakoznunk?
- (c) Mi a várakozási időnk várható értéke?
- (d) Ha már sikertelenül vártunk 4 percet, akkor mi annak a valószínűsége, hogy kell még várnunk legalább 10 percet?
- (e) Mi annak a valószínűsége, hogy 1 órán belül legalább 5 busz érkezik?

9. feladat Egy nem túl forgalmas útszakaszon egy óra alatt átlagosan 6 kocsival halad át.

- (a) Mi annak az esélye, hogy egy másodperc / perc / óra alatt nem jön autó?
- (b) Milyen eloszlást követ a 20 percen belül érkező autók száma?
- (c) Milyen eloszlást követ az első autó érkezésének időpontja?
- (d) Milyen eloszlást követ a második autó érkezésének időpontja?
- (e) Mi annak a valószínűsége, hogy a második autó 20 percen belül érkezik?

10. feladat Egy adott régióban évente várhatóan 3 földrengés van.

- (a) Mi a valószínűsége, hogy 4 hónap alatt több, mint 2 földrengés lesz?
- (b) Ha egy földrengés után már eltelt 1 hónap, akkor mi a valószínűsége, hogy még legalább egy hónapot kell várni a következőre?
- (c) Ha az év első felében volt már egy földrengés, akkor mi a valószínűsége, hogy a másodikban is lesz legalább egy?
- (d) Mi a valószínűsége, hogy az 5. földrengés 8 hónapon belül lesz?

11. feladat A buszmegállóban a buszok egymás után exponenciális eloszlású időtartamonként érkeznek, melynek várható értéke 5 perc. Beállok a megállóba, és várok valakit, aki a harmadik busszal érkezik.

- (a) Várhatóan hány percig állok ott, mire megérkezik?
- (b) Mi a várakozási időm eloszlása?
- (c) Feltéve, hogy az első busz 4 perc múlva megérkezik, mi az ezután következő várakozási időm várható értéke és eloszlása?

12. feladat A campus közelében spotolt kutyák száma Poisson eloszlású 3/nap várható értékkel, a kacsáké szintén Poisson, 2/nap várható értékkel. Mi a valószínűsége, hogy

- (a) két nap alatt több, mint 3 kacsát látok?
- (b) az első két állat felbukkanása között több, mint egy nap telik el? (állat = kacska vagy kutya)
- (c) még több mint 2 órát kell várnom, míg látok egy kutyát, ha 6 órája nem láttam egyet sem?
- (d) a 4. kacska 3 napon belül bukkan fel?
- (e) Ha valaki izgatottságában csak azt tudja elmesélni, hogy 5 állatot látott egy nap alatt, mi a valószínűsége, hogy abból 4 kutya volt?

13. feladat Az M1 autópálya szélén hetente átlagosan két elhagyatott autót találnak. A talált autók felén már nincsenek rajta a kerekek. Mi a valószínűsége, hogy

- (a) január második hetében egy kocsit sem fognak találni, ha az első héten egyet sem találtak?
- (b) az idén elsőnek megtalált kerék nélküli autóra több, mint 8 napot kellett várni?
- (c) 20 nap alatt több, mint 4 kocsit találtak?
- (d) nem lesz meg a 6. kocska még januárban?