

# Matematika A4 - Valószínűesszámítás 5. gyakorlat

## Nevezetes folytonos eloszlások, Poisson-folyamat

### Nevezetes folytonos eloszlások

| $X$ eloszlása | jelölés               | lehetséges értékek | $f(x)$                   | $F(x)$               | $\mathbb{E}(X)$ | $\text{Var}(X)$ |
|---------------|-----------------------|--------------------|--------------------------|----------------------|-----------------|-----------------|
| Egyenletes    | $\text{UNI}(a, b)$    | $x \in [a, b]$     | $\frac{1}{b-a}$          | $\frac{x-a}{b-a}$    | $(a+b)/2$       | $(b-a)^2/12$    |
| Exponenciális | $\text{EXP}(\lambda)$ | $x \geq 0$         | $\lambda e^{-\lambda x}$ | $1 - e^{-\lambda x}$ | $1/\lambda$     | $1/\lambda^2$   |

Az exponenciális eloszlás fontos tulajdonsága az **örökifjúság**:  $\mathbb{P}(X > s+t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$ .

**1. feladat** Egy információs vonalnál a várakozási idő percben mérve exponenciális eloszlású  $\frac{1}{3}$  paraméterrel. Ha már 2 perce várakozom, akkor mi a valószínűsége, hogy a következő percben sorra kerülök?

**Megoldásvázlat** Legyen  $T$  a várakozási idő. Örökifjú tulajdonság alapján a kért valószínűség  $\mathbb{P}(T < 1) = 1 - e^{-1/3}$ .

**2. feladat** Tudjuk, hogy a busz 10:00 és 10:30 közötti egyenletes időben érkezik a megállóba, ezért 10:00-ra a megállóba megyünk.

- (a) Mi a valószínűsége, hogy legalább 10 percet kell a buszra várnunk?
- (b) Ha 10:15-kor még mindig várjuk a buszt, mi a valószínűsége, hogy még legalább 10 percet fogunk a buszra várni?

**Megoldásvázlat** Legyen  $T$  a várakozási idő, ekkor  $T \sim \text{UNI}(0, 30)$ .

- (a)  $\mathbb{P}(T > 10) = \frac{2}{3}$
- (b)  $\mathbb{P}(T > 25 | T > 15) = \frac{1}{3}$

**3. feladat** Annak valószínűsége, hogy egy telefonbeszélgetés legalább 5 percig tart, 0.3. Mennyi a valószínűsége, hogy 10 perc után is tart még?

**Megoldásvázlat** Feltehető, hogy egy telefonbeszélgetés hossza exponenciális eloszlású, ez legyen  $T$ . Ekkor  $\mathbb{P}(T \geq 5) = 0.3$ , amiből az eloszlás paramétere  $\lambda = -\frac{\ln 0.3}{5}$ , amiből  $\mathbb{P}(T \geq 10) = e^{-10\lambda} = 0.09$ .

**4. feladat** Egy adott területen a földrengések ereje egymástól független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók, melynek paramétere  $\frac{5}{12}$  a Richter skálán. Mi a valószínűsége, hogy a következő

- (a) földrengés ereje meghaladja a 4-et?
- (b) két földrengés egyike sem lesz 4-nél erősebb?

**Megoldásvázlat** Legyen  $X, Y$  a következő két földrengés ereje.

- (a)  $\mathbb{P}(X > 4) = e^{-5/3}$
- (b)  $\mathbb{P}(X \leq 4, Y \leq 4) = (1 - e^{-5/3})^2$

**5. feladat** Egy büfébe érkező szállítmány időpontjának ( $X$ ) várható értéke 3 óra, szórása  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ .

- (a) Mikor valószínűbb, hogy a szállítmány 2 előtt érkezik meg: akkor ha  $X \sim \text{EXP}(\lambda)$  vagy akkor ha  $X \sim \text{UNI}(a, b)$ ? Mekkora ez a valószínűség?
- (b) Tegyük fel, hogy  $X \sim \text{UNI}(a, b)$ . Ha 3-ig nem érkezett meg az áru, mi a valószínűsége, hogy 4 után fog?

**Megoldásvázlat**

- (a) Exponenciális nem lehet, mert a várható értékből és a szórásból különböző  $\lambda$  adódna. Egyenletes esetben  $a = 1$ ,  $b = 5$ , és így a kért valószínűség  $\frac{1}{4}$ .
- (b)  $\frac{1}{2}$

**6. feladat** A buszmegállóba érkezésemkor megtudom, hogy az előző busz már legalább 3 perce elment. Mi a valószínűsége, hogy 5 percen belül megérkezik a buszom, ha a buszok követési ideje exponenciális eloszlású, 10 perc várható értékkel?

**Megoldásvázlat** Ha  $X$  a várakozási idő, akkor az örökifjú tulajdonság alapján a kért valószínűség  $\mathbb{P}(X < 5) = 1 - e^{-1/2}$ .

**7. feladat** Egy örökifjú tulajdonságú villanykörténél  $2/3$  annak a valószínűsége, hogy 2000 óránál többet üzemel. Egy városban 100 ilyen égőt helyeztünk el. Mennyi a valószínűsége, hogy 1000 óra elteltével éppen 60 fog világítani?

**Megoldásvázlat** Legyen  $X$  egy ilyen körte működésének az ideje. Ekkor  $X$  exponenciális eloszlású és a  $\mathbb{P}(X > 2000) = \frac{2}{3}$  egyenletből  $e^{-2000\lambda} = \frac{2}{3}$ , azaz  $\lambda = -\frac{\ln(2/3)}{2000}$ . Innen

$$\mathbb{P}(X > 1000) = e^{-1000\lambda} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Így a 100 égőből 1000 óra után is működők számának eloszlása  $\text{BIN}\left(100, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ . Tehát annak a valószínűsége, hogy pontosan 60 működik közülük:  $\binom{100}{60} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{60} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{40}$ .

### Poisson-folyamat

- Véletlen időpontban érkező ismétlődő eseményeket modellez
- Két érkezés közötti idő eloszlása  $\text{EXP}(\lambda)$  valamilyen  $\lambda$ -val
- $t$  hosszú idő alatt bekövetkező érkezések számának eloszlása  $\text{POI}(\lambda \cdot t)$
- Az  $n$ -edik érkezésig eltelt idő eloszlása  $\text{Erlang}(n, \lambda)$ , aminek eloszlásfüggvénye  $t > 0$  esetén:

$$F(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

**8. feladat** Egy buszmegállóban annak valószínűsége, hogy a következő  $t$  percen belül jön busz,  $1 - e^{-\frac{t}{8}}$ .

- Mi annak a valószínűsége, hogy több mint 10 percet kell várakoznunk?
- Mi annak a valószínűsége, hogy több mint 5 percet, de kevesebb mint 10 percet kell várakoznunk?
- Mi a várakozási időnk várható értéke?
- Ha már sikertelenül vártunk 4 percet, akkor mi annak a valószínűsége, hogy kell még várnunk legalább 10 percet?
- Mi annak a valószínűsége, hogy 1 órán belül legalább 5 busz érkezik?

**Megoldásvázlat** Legyen  $X$  a busz érkezési ideje percben mérve. Tudjuk, hogy  $\mathbb{P}(X < t) = 1 - e^{-\frac{t}{8}}$ , vagyis  $X \sim \text{EXP}\left(\frac{1}{8}\right)$ .

- $\mathbb{P}(X > 10) = e^{-\frac{10}{8}} = 0.2865$ .
- $\mathbb{P}(5 < X < 10) = e^{-\frac{5}{8}} - e^{-\frac{10}{8}} = 0.2488$ .
- 8 perc.
- $\mathbb{P}(X > 14 | X > 4) = \mathbb{P}(X > 10) = 0.2865$ .
- A buszok érkezése Poisson-folyamatot alkot, így 60 percen belül érkező buszok számának eloszlása  $\text{POI}\left(\frac{1}{8} \cdot 60\right) = \text{POI}(7.5)$ , amiből a kért valószínűség:

$$1 - \sum_{k=0}^4 e^{-7.5} \cdot \frac{7.5^k}{k!}.$$

**9. feladat** Egy nem túl forgalmas útszakaszon egy óra alatt átlagosan 6 kocs halad át.

- (a) Mi annak az esélye, hogy egy másodperc / perc / óra alatt nem jön autó?
- (b) Milyen eloszlást követ a 20 percen belül érkező autók száma?
- (c) Milyen eloszlást követ az első autó érkezésének időpontja?
- (d) Milyen eloszlást követ a második autó érkezésének időpontja?
- (e) Mi annak a valószínűsége, hogy a második autó 20 percen belül érkezik?

**Megoldásvázlat** Legyen  $X$  a következő autó megérkezéséig eltelt idő órában mérve. Ekkor tudjuk, hogy  $X \sim \text{EXP}(6)$ .

- (a) Másodperc:  $\mathbb{P}\left(X > \frac{1}{3600}\right) = e^{-\frac{1}{600}} \approx 0.9983$   
 Perc:  $e^{-\frac{1}{10}}$ .  
 Óra:  $e^{-6}$ .
- (b) Közelítőleg Poisson 2 paraméterrel. Az (e) feladatban ezt a valószínűségi változót jelöljük  $Y$ -nal.
- (c) Órában mérve exponenciális 6 paraméterrel.
- (d) Órában mérve Erlang, 2 és 6 paraméterekkel. Az (e) feladatban ezt a valószínűségi változót jelöljük  $Z$ -vel.
- (e) Az  $Y$  és a  $Z$  változó segítségével is ki tudjuk számolni:

$$\mathbb{P}\left(Z < \frac{1}{3}\right) = \mathbb{P}(Y \geq 2) = 1 - 3e^{-2}.$$

**10. feladat** Egy adott régióban évente várhatóan 3 földrengés van.

- (a) Mi a valószínűsége, hogy 4 hónap alatt több, mint 2 földrengés lesz?
- (b) Ha egy földrengés után már eltelt 1 hónap, akkor mi a valószínűsége, hogy még legalább egy hónapot kell várni a következőre?
- (c) Ha az év első felében volt már egy földrengés, akkor mi a valószínűsége, hogy a másodikban is lesz legalább egy?
- (d) Mi a valószínűsége, hogy az 5. földrengés 8 hónapon belül lesz?

**Megoldásvázlat** Legyen  $X$  a földrengések száma évente. A feladat alapján  $X \sim \text{POI}(3)$ .

- (a) 4 hónap alatt a földrengések számának az eloszlása  $\text{POI}(1)$ , így a kért valószínűség

$$1 - e^{-1} \cdot \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!}.$$

- (b) A következő földrengésig eltelt idő eloszlása  $\text{EXP}(3)$  évben számolva. Így örökifjúság miatt a kért valószínűség  $e^{-\frac{1}{4}}$ .
- (c) A két félévben a földrengések száma független, így az a kérdés, hogy mi annak a valószínűsége, hogy félév alatt lesz legalább egy földrengés. Ez Poisson vagy exponenciális eloszlással is számolható, az eredmény  $1 - e^{-\frac{3}{2}}$ .
- (d) 8 hónap alatt a földrengések számának az eloszlása  $\text{POI}(2)$ , így a kért valószínűség

$$1 - e^{-2} \cdot \sum_{k=0}^4 \frac{2^k}{k!}.$$

**11. feladat** A buszmegállóban a buszok egymás után exponenciális eloszlású időtartamonként érkeznek, melynek várható értéke 5 perc. Beállok a megállóba, és várok valakit, aki a harmadik busszal érkezik.

- (a) Várhatóan hány percre állok ott, mire megérkezik?
- (b) Mi a várakozási időm eloszlása?
- (c) Feltéve, hogy az első busz 4 perc múlva megérkezik, mi az ezután következő várakozási időm várható értéke és eloszlása?

**Megoldásvázlat** Percben mérve  $\lambda = \frac{1}{5}$ .

- (a) Legyen  $X$  a várakozási időm! Ekkor  $X$  három darab  $\text{EXP}(\frac{1}{5})$  változó összege, amelyek várható értéke 5, így  $\mathbb{E}(X) = 15$ .
- (b) Percben mérve Erlang eloszlás 3 és  $1/5$  paraméterekkel.
- (c) Ha az első busz megérkezett, mindegy hogy mikor, akkor még két buszt kell várnom, tehát a várható érték erre a várakozási időre 10 perc, az eloszlása pedig Erlang 2 és  $1/5$  paraméterekkel.

**12. feladat** A campus közelében spotolt kutyák száma Poisson eloszlású 3/nap várható értékkel, a kacsáké szintén Poisson, 2/nap várható értékkel. Mi a valószínűsége, hogy

- (a) két nap alatt több, mint 3 kacsát látok?
- (b) az első két állat felbukkanása között több, mint egy nap telik el? (állat = kacska vagy kutya)
- (c) még több mint 2 órát kell várnom, míg látok egy kutyát, ha 6 órája nem láttam egyet sem?
- (d) a 4. kacska 3 napon belül bukkan fel?
- (e) Ha valaki izgatottságában csak azt tudja elmesélni, hogy 5 állatot látott egy nap alatt, mi a valószínűsége, hogy abból 4 kutya volt?

**Megoldásvázlat**

- (a) Két nap alatt érkező kacsák száma Poisson eloszlású 4 paraméterrel, így  $1 - \sum_{k=0}^3 e^{-4} \cdot \frac{4^k}{k!}$ .
- (b) Egy nap alatt érkező állatok számának eloszlása  $\text{POI}(5)$ , így  $e^{-5}$ .
- (c) Örökifjúság miatt csak annak a valószínűségét kell kiszámolni, hogy a következő kutya több, mint 2 óra ( $\frac{1}{12}$  nap) múlva jön. A következő kutya  $\text{EXP}(3)$  nap múlva jön, így a válasz  $e^{-\frac{1}{4}}$ .

**Másképp:** 2 óra alatt érkező kutyák számának eloszlása  $\text{POI}(\frac{1}{4})$ , így ez  $e^{-\frac{1}{4}}$  valószínűséggel 0.

- (d) 3 nap alatt a kacsák számának eloszlása  $\text{POI}(6)$ , így a válasz  $1 - \sum_{k=0}^3 e^{-6} \cdot \frac{6^k}{k!}$ .
- (e) Az 5 állat közül a kutyák számának eloszlása  $\text{BIN}(5, \frac{3}{5})$ , így  $5 \cdot (\frac{3}{5})^4 \cdot \frac{2}{5}$ .

**13. feladat** Az M1 autópálya szélén hetente átlagosan két elhagyatott autót találnak. A talált autók felén már nincsenek rajta a kerekek. Mi a valószínűsége, hogy

- (a) január második hetében egy kocsit sem fognak találni, ha az első héten egyet sem találtak?
- (b) az idén elsőnek megtalált kerék nélküli autóra több, mint 8 napot kellett várni?
- (c) 20 nap alatt több, mint 4 kocsit találtak?
- (d) nem lesz meg a 6. kocsi még januárban?

**Megoldásvázlat**

(a)  $e^{-2}$

(b)  $e^{-\frac{8}{7}}$

(c)  $1 - \sum_{k=0}^4 e^{-\frac{40}{7}} \cdot \frac{\left(\frac{40}{7}\right)^k}{k!}$

(d)  $\sum_{k=0}^5 e^{-\frac{62}{7}} \cdot \frac{\left(\frac{62}{7}\right)^k}{k!}$