Matematika A4 - Valószínűségszámítás 7. gyakorlat
Konvolúció, változók transzformációja

Konvolúció

Legyenek X és Y független valószínűségi változók.

Ha X és Y diszkrét: $\mathbb{P}(X+Y=m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) \cdot \mathbb{P}(Y=m-k)$.

Ha X és Y folytonos: $f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(t-x)\,\mathrm{d}x$.

Nevezetes összegek:

- $X \sim \mathrm{BIN}(n,p)$, $Y \sim \mathrm{BIN}(m,p)$ független, akkor $X+Y \sim \mathrm{BIN}(n+m,p)$
- $X \sim \mathrm{POI}(\lambda)$, $Y \sim \mathrm{POI}(\mu)$ független, akkor $X+Y \sim \mathrm{POI}(\lambda+\mu)$
- $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathrm{GEO}(p)$ függetlenek, akkor $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathrm{NEGBIN}(n,p)$
- $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$ függetlenek, akkor $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathrm{Erlang}(n,\lambda)$
- $X \sim \mathcal{N}(m_1,\, s_1^2)$, $Y \sim \mathrm{N}(m_2,\, s_2^2)$ függetlenek, akkor:

$$X+Y \sim \mathcal{N}(m_1+m_2,\, s_1^2+s_2^2) \quad \text{és} \quad X-Y \sim \mathcal{N}(m_1-m_2,\, s_1^2+s_2^2)$$

1. feladat Egy kísértetjárta kastélyban átlagosan évente ötször jelennek meg szellemek.

(a) A szellemek megjelenésének 20%-a különösen ijesztő (pl. lánccsörgéssel jár). Mi a valószínűsége, hogy egy évben több, mint 2 különösen ijesztő szellemmegjelenés van?

(b) Ugyanebben a kastélyban évente átlagosan tízszer hallani hátborzongató suttogást a folyosókon. Mi annak a valószínűsége, hogy egy adott évben pontosan 8 ijesztő esemény (szellemmegjelenés vagy suttogás) történik?

2. feladat Egy boszorkány bájitalt készít. Két összetevőt ad hozzá egymástól független mennyiségben. Határozzuk meg a teljes hozzáadott mennyiség eloszlását (sűrűségfüggvényét) az alábbi esetekben!



(a) Az első összetevő (szárított békapor) mennyisége $X \sim \mathrm{UNI}(0,1)$ liter, a másodiké (pókláb esszencia) $Y \sim \mathrm{UNI}(1,3)$ liter.

(b) Az első összetevő (denevérszárny kivonat) mennyisége $X \sim \mathrm{UNI}(1,3)$ liter, a másodiké (mocsári nyálka) $Y \sim \mathrm{UNI}(3,5)$ liter.

3. feladat Egy töklámpás elkészítése két fázisból áll. A tök belsejének kikaparása $X \sim \mathrm{UNI}(0,2)$ óráig tart, míg a félelmetes arc kifaragása $Y \sim \mathrm{UNI}(0,2)$ órába telik. A két fázis ideje egymástól független. Határozzuk meg a töklámpás elkészítéséhez szükséges teljes idő sűrűségfüggvényét!

4. feladat Két szellem előjeles sebességének a nagysága független, standard normális eloszlású. Határozzuk meg a sebességeik összegének eloszlását!

5. feladat Egy kísértetjárta utcában a halloween éjjelén összeszedhető cukorkák száma évente normális eloszlású 500 darab várható értékkel, 50 darab szórással. Mi a valószínűsége, hogy két egymást követő évben összesen több, mint 1200 darab cukorkát zsákmányolnak a gyerekek? Mi a valószínűsége, hogy a következő évben legalább 100 darabbal kevesebb cukorkát sikerül szerezni, mint a mostaniban?

6. feladat Egy boszorkány varázsseprűjének teherbírása normális eloszlású 300 kg várható értékkel és 10 kg szórással. Egy varázslatos óriástök súlyának eloszlása szintén normális, 30 kg várható értékkel és 5 kg szórással. Hány óriástöknek kell a seprűre kerülnie ahhoz, hogy a seprű eltörésének (túlterhelődésének) valószínűsége meghaladja a 0.1-et?

Változók transzformációja

Legyen X egy folytonos valószínűségi változó, $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy függvény és $Y = g(X)$.

- Ha g függvény szigorúan monoton növő: $F_Y(y) = F_X\left(g^{-1}(y)\right)$, illetve ezt y szerint deriválva (összetett függvény és inverzfüggvény deriválási szabályokat használva) kapjuk meg a sűrűségfüggvényt: $f_Y(y) = \frac{f_X\left(g^{-1}(y)\right)}{g'(g^{-1}(y))}$.
- Ha g szigorúan monoton csökkenő: $F_Y(y) = 1 - F_X\left(g^{-1}(y)\right)$, $f_Y(y) = -\frac{f_X\left(g^{-1}(y)\right)}{g'(g^{-1}(y))}$.
- $\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x$, $\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x - \mathbb{E}(Y)^2$.

7. feladat Egy kezdő vámpír minden éjjel megpróbál áldozatot találni, a siker valószínűsége minden éjjel egymástól függetlenül p. Legyen X az első sikeres éjszaka sorszáma.

(a) Az áldozatból elszívott életerő egységek száma az $Y = 3X - 2$ képlettel számolható. Mi az Y változó súlyfüggvénye, várható értéke, szórása?

(b) A vámpír erejének növekedése a $Z = \mathrm{e}^X$ képlettel számolható. Mi a Z változó súlyfüggvénye, várható értéke, szórása?

8. feladat Egy fekete macska tűnik fel az úton Halloween éjjelén. Legyen X az az időtartam (másodpercben), amíg látható marad, mielőtt eltűnik az árnyékban. Tudjuk, hogy X sűrűségfüggvénye $f(x) = 2x$, ha $x \in (0, 1)$, egyébként 0. Mi lesz az $Y = 3 + 5X$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye? Számoljuk ki a várható értéket!

9. feladat Egy varázsgyertya égési ideje exponenciális eloszlású, 25 óra várható értékkel. A barátommal a következő játékot játsszuk: fizetek neki 625 aranytallért, és ha leég a gyertya, akkor ő kifizeti nekem az égési idő órában mért négyzetét. Kinek előnyös a játék? Számoljuk ki a barátom által fizetett pénz eloszlásfüggvényét!

10. feladat Egy véletlenszerűen kiválasztott pók mérgének ereje egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon, jelöljük X-szel. Határozzuk meg az alábbi változók eloszlását! Hogyan változik a várható érték és a szórás?

(a) $\sqrt{X}$ (b) X^2 (c) $X^{-\frac{1}{2}}$ (d) X^{-1}

11. feladat Egy zombi felbukkanásának időpontja órában mérve egy 2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó! Jelöljük ezt X-szel! Mi lesz X^k eloszlása?

12. feladat Egy véletlenszerűen kiválasztott csontváz magassága (centiméterben mérve) normális eloszlású μ várható értékkel és σ szórással. Ezt a $Z := aX + b$ képlettel tudjuk átváltani a szellemvilágban használatos mértékegységre, ahol X jelöli a centiméterben mért magasságot, a és b pedig titkos konstansok. Mi lesz Z változó eloszlása (a és b függvényében)?

