Matematika A4 - Valószínűségszámítás 7. gyakorlat
Konvolúció, változók transzformációja

Konvolúció

Legyenek X és Y független valószínűségi változók.

Ha X és Y diszkrét: $\mathbb{P}(X+Y=m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X=k)\cdot\mathbb{P}(Y=m-k)$.

Ha X és Y folytonos: $f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\cdot f_Y(t-x)\,\mathrm{d}x$.

Nevezetes összegek:

- $X \sim \mathrm{BIN}(n,p)$, $Y \sim \mathrm{BIN}(m,p)$ független, akkor $X+Y \sim \mathrm{BIN}(n+m,p)$
- $X \sim \mathrm{POI}(\lambda)$, $Y \sim \mathrm{POI}(\mu)$ független, akkor $X+Y \sim \mathrm{POI}(\lambda+\mu)$
- $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathrm{GEO}(p)$ függetlenek, akkor $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathrm{NEGBIN}(n,p)$
- $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$ függetlenek, akkor $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathrm{Erlang}(n,\lambda)$
- $X \sim \mathcal{N}(m_1,\, s_1^2)$, $Y \sim \mathrm{N}(m_2,\, s_2^2)$ függetlenek, akkor:

$$X+Y \sim \mathcal{N}(m_1+m_2,\, s_1^2+s_2^2) \quad \text{és} \quad X-Y \sim \mathcal{N}(m_1-m_2,\, s_1^2+s_2^2)$$

1. feladat Egy kísértetjárta kastélyban átlagosan évente ötször jelennek meg szellemek.

(a) A szellemek megjelenésének 20%-a különösen ijesztő (pl. lánccsörgéssel jár). Mi a valószínűsége, hogy egy évben több, mint 2 különösen ijesztő szellemmegjelenés van?

(b) Ugyanebben a kastélyban évente átlagosan tízszer hallani hátborzongató suttogást a folyosókon. Mi annak a valószínűsége, hogy egy adott évben pontosan 8 ijesztő esemény (szellemmegjelenés vagy suttogás) történik?

Megoldásvázlat

(a) A szellemmegjelenések számának eloszlása $M \sim \mathrm{POI}(5)$. Poisson ritkítás alapján a különösen ijesztő megjelenések számának eloszlása $K \sim \mathrm{POI}(1)$, így

$$\mathbb{P}(K>2) = 1 - 2.5\mathrm{e}^{-1}.$$

(b) A suttogások számának eloszlása $S \sim \mathrm{POI}(10)$. Így az ijesztő események száma $I = M+S \sim \mathrm{POI}(15)$. Vagyis

$$\mathbb{P}(I=8) = \mathrm{e}^{-15}\cdot\frac{15^8}{8!}.$$

2. feladat Egy boszorkány bájitalt készít. Két összetevőt ad hozzá egymástól független mennyiségben. Határozzuk meg a teljes hozzáadott mennyiség eloszlását (sűrűségfüggvényét) az alábbi esetekben!



(a) Az első összetevő (szárított békapor) mennyisége $X \sim \mathrm{UNI}(0,1)$ liter, a másodiké (pókláb esszencia) $Y \sim \mathrm{UNI}(1,3)$ liter.

(b) Az első összetevő (denevérszárny kivonat) mennyisége $X \sim \mathrm{UNI}(1,3)$ liter, a másodiké (mocsári nyálka) $Y \sim \mathrm{UNI}(3,5)$ liter.

Megoldásvázlat

(a) Az $f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(t-x)\,\mathrm{d}x$ formulát szeretnénk használni. Most $f_X(x) = 1$, ha $x \in (0,1)$ és $f_Y(y) = \frac{1}{2}$, ha $y \in (1,3)$, egyébként a sűrűségfüggvények értéke 0. Így konstans $\frac{1}{2}$-et kell integrálni, ha teljesülnek a feltételek, azaz $0 < x < 1$ és $1 < t-x < 3$. Utóbbit x-re

rendezve azt kapjuk, hogy $t-3 < x < t-1$. Nekünk azok az x-ek jók, ahol egyszerre teljesül az összes feltétel, azaz az kell, hogy $\max(0, t-3) < x < \min(1, t-1)$. Tehát:

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(t-x)\,\mathrm{d}x = \int_{\max(0,t-3)}^{\min(1,t-1)} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x.$$

Ezt viszont csak úgy tudjuk kiszámolni, ha szétbontjuk esetekre, hiszen t értékétől függ, hogy mi lesz az integrál alsó és felső határa, hiszen ettől függ a min és a max értéke. Legelőször érdemes észrevenni, hogy mivel $0 < X < 1$ és $1 < Y < 3$, így $1 < X + Y < 4$, vagyis a keresett sűrűségfüggvény 0 lesz az $(1, 4)$ intervallumon kívül.

Az $(1, 4)$ intervallumon belül ahhoz, hogy megmondjuk, hogy mik lesznek a különböző ágak határai, csak annyit kell megvizsgálni, hogy az integrál határai „hol váltanak", azaz például az alsó határ esetén mikor lesz egyenlő 0 és $t-3$ (ebből jön, hogy $t = 3$ egy határpont), illetve a felső határnál mikor lesz egyenlő 1 és $t-1$ (innen jön, hogy 2 egy határpont). Ezután lehet számolni egyesével az ágakat:

- 1 és 2 közötti t esetén az alsó határ $\max(0, t-3) = 0$, a felső határ $\min(1, t-1) = t-1$ és ezután már csak konstans $\frac{1}{2}$-edet kell kiintegrálni 0-tól $(t-1)$-ig,
- $2 < t < 3$ esetén $\max(0, t-3) = 0$, de itt már $\min(1, t-1) = 1$, így most az integrál 0-tól 1-ig megy,
- $3 < t < 4$ esetén $\max(0, t-3) = t-3$, míg $\min(1, t-1) = 1$, így most $(t-3)$-tól 1-ig megy az integrál.

Ezekből már könnyen adódik a keresett sűrűségfüggvény:

$$f_{X+Y}(t) = \begin{cases} (t-1)/2, & \text{ha } 1 < t \le 2, \\ 1/2, & \text{ha } 2 < t \le 3, \\ (4-t)/2, & \text{ha } 3 < t \le 4, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(b) Előzőhöz hasonlóan számolva azt kapjuk, hogy

$$f_{X+Y}(t) = \begin{cases} (t-4)/4, & \text{ha } 4 < t \le 6, \\ (8-t)/4, & \text{ha } 6 < t \le 8, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

3. feladat Egy töklámpás elkészítése két fázisból áll. A tök belsejének kikaparása $X \sim \mathrm{UNI}(0, 2)$ óráig tart, míg a félelmetes arc kifaragása $Y \sim \mathrm{UNI}(0, 2)$ órába telik. A két fázis ideje egymástól független. Határozzuk meg a töklámpás elkészítéséhez szükséges teljes idő sűrűségfüggvényét!

Megoldásvázlat A teljes idő $Z = X + Y$. A konvolúciós formula alapján:

$$f_Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(t-x)\,\mathrm{d}x.$$

Mivel $X \sim \mathrm{UNI}(0, 2)$ és $Y \sim \mathrm{UNI}(0, 2)$, mindkét sűrűségfüggvény értéke $\frac{1}{2}$ a $(0, 2)$ intervallumon, és 0 azon kívül. Az integrandus pontosan akkor nem nulla, ha $0 < x < 2$ és $0 < t - x < 2$. Utóbbiból következik, hogy $t - 2 < x < t$. A két feltételt egyesítve az integrálás határai:

$$\max(0, t-2) < x < \min(2, t).$$

Mivel az összeg lehetséges értékei a $(0, 4)$ intervallumba esnek, az eseteket a következőképpen bontjuk szét:

- Ha $0 < t \le 2$: az integrálás alsó határa 0, a felső határa t, így

$$f_Z(t) = \int_0^t \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{4}\right]_0^t = \frac{t}{4}.$$

- Ha $2 < t < 4$: az alsó határ $t-2$, a felső határ 2, így

$$f_Z(t) = \int_{t-2}^{2} \frac{1}{4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{4}\right]_{t-2}^{2} = \frac{2-(t-2)}{4} = \frac{4-t}{4}.$$

Tehát a teljes elkészítési idő sűrűségfüggvénye:

$$f_Z(t) = \begin{cases} t/4, & \text{ha } 0 < t \le 2, \\ (4-t)/4, & \text{ha } 2 < t < 4, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

4. feladat Két szellem előjeles sebességének a nagysága független, standard normális eloszlású. Határozzuk meg a sebességeik összegének eloszlását!

Megoldásvázlat Jelölje X és Y a két szellem sebességét, vagyis $X,\, Y \sim \mathcal{N}(0,\,1)$. Legyen $Z := X+Y$. Ekkor Z sűrűségfüggvénye:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(z-y)^2+y^2}{2}}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}/\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-\frac{(y-z/2)^2}{2/2}}\,\mathrm{d}y \cdot \mathrm{e}^{-z^2/4} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-z^2/4},$$

hiszen az utolsó integrálban épp $\mathcal{N}\left(\frac{z}{2}, \frac{1}{2}\right)$ eloszlás sűrűségfüggvénye van, így az integrál értéke 1. Így $Z \sim \mathcal{N}(0, 2)$ (tehát a szórásnégyzet 2).

5. feladat Egy kísértetjárta utcában a halloween éjjelén összeszedhető cukorkák száma évente normális eloszlású 500 darab várható értékkel, 50 darab szórással. Mi a valószínűsége, hogy két egymást követő évben összesen több, mint 1200 darab cukorkát zsákmányolnak a gyerekek? Mi a valószínűsége, hogy a következő évben legalább 100 darabbal kevesebb cukorkát sikerül szerezni, mint a mostaniban?

Megoldásvázlat Két év alatt a várható érték 1000 db, a szórás pedig $\sqrt{2 \cdot 50^2}$ db. Így, ha X_1 és X_2 jelöli az évi cukorkamennyiségeket, akkor

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 > 1200) = 1 - \Phi\left(\frac{1200-1000}{\sqrt{5000}}\right) = 1 - \Phi(2.83) \approx 0.01\,.$$

A második kérdéshez azt használjuk, hogy $X_2 - X_1 \sim \mathcal{N}(0,\, 2 \cdot 50^2)$. Így:

$$\mathbb{P}(X_2 < X_1 - 100) = \mathbb{P}\left(\frac{X_2 - X_1}{\sqrt{5000}} < \frac{-100}{\sqrt{5000}}\right) = \Phi(-\sqrt{2}) = 1 - \Phi(\sqrt{2}) \approx 0.08\,.$$

6. feladat Egy boszorkány varázsseprűjének teherbírása normális eloszlású 300 kg várható értékkel és 10 kg szórással. Egy varázslatos óriástök súlyának eloszlása szintén normális, 30 kg várható értékkel és 5 kg szórással. Hány óriástöknek kell a seprűre kerülnie ahhoz, hogy a seprű eltörésének (túlterhelődésének) valószínűsége meghaladja a 0.1-et?

Megoldásvázlat Legyen $X \sim \mathcal{N}(300,\, 10^2)$ a varázsseprű teherbírása, $T_i \sim \mathcal{N}(30,\, 5)$ pedig az i-edik óriástök tömege. A kérdés, hogy mennyi a legkisebb n, amire $\mathbb{P}(T_1 + \ldots + T_n > X) > 0.1$. Világos, hogy az n értéke 10 körül lesz, erre általában egy kicsit bátor lenne CHT-t alapozni, de most nem kell, mert független normálisok összege normális. Legyen $S_n := T_1 + \ldots + T_n \sim \mathcal{N}(30n,\, 25n)$ az első n óriástök össztömege. Másrészt, ekkor $S_n - X \sim \mathcal{N}(30n - 300,\, 25n + 100)$. Így standardizálás után azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(S_n > X) = \mathbb{P}(S_n - X > 0) = \mathbb{P}\left(\frac{(S_n - X) - (30n - 300)}{\sqrt{25n+100}} > \frac{-30n+300}{\sqrt{25n+100}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-30n+300}{\sqrt{25n+100}}\right).$$

Mivel $\Phi(1.28) \approx 0.9$, azt kapjuk, hogy a

$$\frac{-30n+300}{\sqrt{25n+100}} < 1.28$$

egyenlőtlenséget kell megoldanunk. Könnyen látható, hogy $n \ge 10$ esetén ez teljesül, viszont $n < 10$ esetén nem. Így legalább 10 töknek kell lennie a seprűn.

Változók transzformációja

Legyen X egy folytonos valószínűségi változó, $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy függvény és $Y = g(X)$.

- Ha g függvény szigorúan monoton növő: $F_Y(y) = F_X\left(g^{-1}(y)\right)$, illetve ezt y szerint deriválva (összetett függvény és inverzfüggvény deriválási szabályokat használva) kapjuk meg a sűrűségfüggvényt: $f_Y(y) = \frac{f_X\left(g^{-1}(y)\right)}{g'(g^{-1}(y))}$.
- Ha g szigorúan monoton csökkenő: $F_Y(y) = 1 - F_X\left(g^{-1}(y)\right)$, $f_Y(y) = -\frac{f_X\left(g^{-1}(y)\right)}{g'(g^{-1}(y))}$.
- $\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x$, $\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x - \mathbb{E}(Y)^2$.

7. feladat Egy kezdő vámpír minden éjjel megpróbál áldozatot találni, a siker valószínűsége minden éjjel egymástól függetlenül p. Legyen X az első sikeres éjszaka sorszáma.

(a) Az áldozatból elszívott életerő egységek száma az $Y = 3X - 2$ képlettel számolható. Mi az Y változó súlyfüggvénye, várható értéke, szórása?

(b) A vámpír erejének növekedése a $Z = \mathrm{e}^X$ képlettel számolható. Mi a Z változó súlyfüggvénye, várható értéke, szórása?

Megoldásvázlat Vegyük észre, hogy $X \sim \mathrm{GEO}(p)$.

(a) Így $Y = 3X - 2$ esetén:

$$p_Y(k) = \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(3X - 2 = k) = \mathbb{P}\left(X = \frac{k+2}{3}\right) = (1-p)^{\frac{k-1}{3}} p,$$

ha $\frac{k+2}{3}$ pozitív egész, azaz $k \in \{1, 4, 7, \dots\}$.

Várható érték tulajdonságai alapján:

$$\mathbb{E}(Y) = 3\mathbb{E}(X) - 2 = \frac{3}{p} - 2.$$

Szórásnégyzet tulajdonságai alapján:

$$\mathbb{D}^2(Y) = 9\mathbb{D}^2(X) = \frac{9(1-p)}{p^2}.$$

(b) $Z = \mathrm{e}^X$ esetén:

$$p_Z(k) = \mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}\left(\mathrm{e}^X = k\right) = \mathbb{P}\left(X = \ln k\right) = (1-p)^{\ln k - 1} p,$$

ha $\ln k$ pozitív egész, azaz $k \in \{\mathrm{e}, \mathrm{e}^2, \mathrm{e}^3, \dots\}$.

Várható érték és szórásnégyzet definíció alapján számolható:

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^k (1-p)^{k-1} p = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{e}(1-p))^k \overset{(*)}{=} \frac{\mathrm{e}p}{1 - \mathrm{e} + \mathrm{e}p},$$

ha $p > 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$, egyébként a várható érték nem létezik. A $(*)$-gal jelölt lépésnél azt használtuk, hogy $q \in (0,1)$ esetén $\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$, míg $q \geq 1$ esetén a sor nem konvergens.

Ehhez hasonlóan

$$\mathbb{E}\left(Z^2\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{2k} (1-p)^{k-1} p = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathrm{e}^2(1-p)\right)^k \overset{(*)}{=} \frac{\mathrm{e}^2 p}{1 - \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^2 p},$$

ha $p > 1 - \frac{1}{\mathrm{e}^2}$, egyébként a $\mathbb{E}\left(Y^2\right)$ várható érték nem létezik.

Tehát a $\mathbb{D}^2(Z)$ szórásnégyzet is akkor létezik, ha $p > 1 - \frac{1}{\mathrm{e}^2}$. Ekkor az értéke:

$$\mathbb{D}^2(Z) = \mathbb{E}\left(Z^2\right) - \mathbb{E}(Z)^2 = \frac{\mathrm{e}^2 p}{1 - \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^2 p} - \left(\frac{\mathrm{e}p}{1 - \mathrm{e} + \mathrm{e}p}\right)^2.$$

8. feladat Egy fekete macska tűnik fel az úton Halloween éjjelén. Legyen X az az időtartam (másodpercben), amíg látható marad, mielőtt eltűnik az árnyékban. Tudjuk, hogy X sűrűségfüggvénye $f(x) = 2x$, ha $x \in (0,1)$, egyébként 0. Mi lesz az $Y = 3 + 5X$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye? Számoljuk ki a várható értéket!

Megoldásvázlat $g(x) = 3 + 5x$ szigorúan monoton függvény és $g^{-1}(y) = \frac{y-3}{5}$.

Sűrűségfüggvénye a szigorúan monoton növő transzformációnál látott képlet alapján:

$$f_Y(y) = \frac{f_X\left(g^{-1}(y)\right)}{g'\left(g^{-1}(y)\right)} = \frac{2 \cdot \frac{y-3}{5}}{5} = \frac{2(y-3)}{25},$$

ha $\frac{y-3}{5} \in (0,1)$, azaz $y \in (3,8)$. Egyébként $f_Y(y) = 0$.

Várható értéket többféleképpen is számolhatjuk:

- $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 2x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$, így $\mathbb{E}(Y) = 3 + 5\mathbb{E}(X) = \frac{19}{3}$
- Y sűrűségfüggvényéből: $\mathbb{E}(Y) = \int_3^8 y \cdot \frac{2(y-3)}{25} \,\mathrm{d}y = \frac{19}{3}$
- Transzformált változó várható értékére vonatkozó képlettel: $\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 (3+5x) \cdot (2x) \,\mathrm{d}x = \frac{19}{3}$

9. feladat Egy varázsgyertya égési ideje exponenciális eloszlású, 25 óra várható értékkel. A barátommal a következő játékot játsszuk: fizetek neki 625 aranytallért, és ha leég a gyertya, akkor ő kifizeti nekem az égési idő órában mért négyzetét. Kinek előnyös a játék? Számoljuk ki a barátom által fizetett pénz eloszlásfüggvényét!

Megoldásvázlat Legyen X a gyertya égési ideje, $\mathbb{E}(X) = 25$, így $X \sim \mathrm{EXP}\left(\frac{1}{25}\right)$.

Legyen Y a nyereményem, azaz $Y = X^2 - 625$.

$g(x) = x^2 - 625$ szigorúan monoton nő $\mathbb{R}_+$-on.

$\mathbb{E}(Y) = \int_0^\infty (x^2 - 625) f_X(x) \,\mathrm{d}x$ parciális integrálással számolható vagy az integrált kettészedve:

- $\int_0^\infty x^2 f_X(x) \,\mathrm{d}x = \mathbb{E}\left(X^2\right) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{E}(X)^2 \overset{(*)}{=} 625 + 625$, ahol $(*)$-nál azt használtuk, hogy $X \sim \mathrm{EXP}\left(\frac{1}{25}\right)$,
- $\int_0^\infty 625 f_X(x) \,\mathrm{d}x = 625 \int_0^\infty f_X(x) \,\mathrm{d}x = 625$,

így $\mathbb{E}(Y) = 625$, vagyis nekem előnyös a játék.

Mivel $g^{-1}(y) = \sqrt{y + 625}$, így Y eloszlásfüggvénye $F_Y(y) = 1 - \exp(-\frac{1}{25}\sqrt{y+625})$, ha $y \geq -625$, egyébként $F_Y(y) = 0$.

10. feladat Egy véletlenszerűen kiválasztott pók mérgének ereje egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumon, jelöljük X-szel. Határozzuk meg az alábbi változók eloszlását! Hogyan változik a várható érték és a szórás?

(a) $\sqrt{X}$ (b) X^2 (c) $X^{-\frac{1}{2}}$ (d) X^{-1}

Megoldásvázlat

(a) Legyen $Y = \sqrt{X}$. Ekkor $g(x) = \sqrt{x}$ monoton növő $\mathbb{R}_+$-on, $g^{-1}(y) = y^2$, így

- $F_Y(y) = y^2$, ha $0 < y \leq 1$ ($F_Y(y) = 0$, ha $y \leq 0$, $F_Y(y) = 1$, ha $1 < y$)
- $\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 g(x) \cdot 1 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$
- $\mathbb{D}^2(Y) = \int_0^1 g(x)^2 \cdot 1 \,\mathrm{d}x - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{1}{18}$

(b) Legyen $Y = X^2$. Ekkor $g(x) = x^2$ monoton növő $\mathbb{R}_+$-on, $g^{-1}(y) = \sqrt{y}$, így

- $F_Y(y) = \sqrt{y}$, ha $0 < y \leq 1$ ($F_Y(y) = 0$, ha $y \leq 0$, $F_Y(y) = 1$, ha $1 < y$)
- $\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 g(x) \cdot 1 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$
- $\mathbb{D}^2(Y) = \int_0^1 g(x)^2 \cdot 1 \,\mathrm{d}x - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{4}{45}$

(c) Legyen $Y = X^{-\frac{1}{2}}$. Ekkor $g(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ monoton csökkenő $\mathbb{R}_+$-on, $g^{-1}(y) = y^{-2}$.

- Itt először fontos észrevenni, hogy az eddigiekkel ellentétben itt Y lehetséges értékei már nem 0 és 1 között vannak, hanem 1 és ∞ között. Így $F_Y(y) = 1 - y^{-2}$, ha $1 \leq y$ és $F_Y(y) = 0$, ha $y < 1$
- $\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 g(x) \cdot 1 \,\mathrm{d}x = 2$
- $\mathbb{D}^2(Y) = \int_0^1 g(x)^2 \cdot 1 \,\mathrm{d}x - \mathbb{E}(Y)^2$ nem véges

(d) Legyen $Y = X^{-1}$. Ekkor $g(x) = x^{-1}$ monoton csökkenő $\mathbb{R}_+$-on, $g^{-1}(y) = y^{-1}$, így

- $F_Y(y) = 1 - y^{-1}$, ha $1 \leq y$ ($F_Y(y) = 0$, ha $y < 1$)
- $\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 g(x) \cdot 1 \,\mathrm{d}x$ nem véges
- $\mathbb{D}^2(Y) = \int_0^1 g(x)^2 \cdot 1 \,\mathrm{d}x - \mathbb{E}(Y)^2$ nem véges

11. feladat Egy zombi felbukkanásának időpontja órában mérve egy 2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó! Jelöljük ezt X-szel! Mi lesz X^k eloszlása?

Megoldásvázlat $X \sim \mathrm{EXP}(2)$, $g(x) = x^k$ (szigorúan monoton nő $[0, \infty)$-n), $g^{-1}(y) = \sqrt[k]{y}$. Így, ha $Y = X^k$, akkor $f_Y(y) = 2 \cdot \mathrm{e}^{-2 \cdot \sqrt[k]{y}} \cdot \frac{1}{k} y^{\frac{1}{k}-1}$, ha $y \geq 0$.

12. feladat Egy véletlenszerűen kiválasztott csontváz magassága (centiméterben mérve) normális eloszlású μ várható értékkel és σ szórással. Ezt a $Z := aX + b$ képlettel tudjuk átváltani a szellemvilágban használatos mértékegységre, ahol X jelöli a centiméterben mért magasságot, a és b pedig titkos konstansok. Mi lesz Z változó eloszlása (a és b függvényében)?

Megoldásvázlat $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma a} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(z-b-a\mu)^2}{2(\sigma a)^2}}$, vagyis $Z \sim \mathcal{N}(b + a\mu,\, a^2\sigma^2)$.

