Matematika A4 - Valószínűségszámítás 8. gyakorlat
Többváltozós eloszlások

Többváltozós diszkrét eloszlások

- **Együttes súlyfüggvény:** $p(x_i, y_j) = \mathbb{P}(X = x_i,\, Y = y_j)$
- X és Y független $\Leftrightarrow \mathbb{P}(X = x_i,\, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i) \cdot \mathbb{P}(Y = y_j)$ minden i, j-re
- Peremsúlyfüggvény (marginális):

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = x_i,\, Y = y_j), \quad \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = x_i,\, Y = y_j)$$

- Feltételes súlyfüggvény:

$$\mathbb{P}(X = x_i \,|\, Y = y_j) = \frac{\mathbb{P}(X = x_i,\, Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)}, \quad \mathbb{P}(Y = y_j \,|\, X = x_i) = \frac{\mathbb{P}(Y = y_j,\, X = x_i)}{\mathbb{P}(X = x_i)}$$

- Kovariancia: $\mathrm{COV}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$
- Ha X és Y független, akkor $\mathrm{COV}(X, Y) = 0$, de ez visszafele nem igaz

1. feladat Először egy (szabályos) kockával dobunk, majd annyi (igazságos) érmével, ahányast a kockával dobtunk. Mi a valószínűsége, hogy a kockával 4-est dobunk és az érmékkel 2 fejet kapunk? Mi a valószínűsége, hogy 5 fejet kapunk? Adjuk meg a kockadobás eredményének és a fejek számának az együttes-, a perem- és a feltételes eloszlásait!

2. feladat Két kockával dobva, mi a dobott számok

(a) összegének és különbségének (ahol mindig ugyanannak a kockának az eredményéből vonjuk ki a másikat, vagyis a különbség lehet negatív)

(b) minimumának és maximumának

az együttes eloszlása? Függetlenek-e a marginálisok egymástól? Legyen (X, Y) a részfeladatoknak megfelelő valószínűségi változó pár. Számítsuk ki $\mathrm{COV}(X, Y)$ értékét!

3. feladat Kockával dobunk addig, amíg először páratlan szám jön! Ehhez szükséges dobások számát jelölje N és legyen X az első páratlan dobás értéke! Mi az eloszlása X-nek, illetve N-nek? Független-e az X változó az N változótól? Adjuk meg az együttes eloszlásukat is!

Többváltozós folytonos eloszlások

Együttes eloszlásfüggvény: $F(x, y) := \mathbb{P}(X < x,\, Y < y)$. Tulajdonságai:

- $0 \le F(x, y) \le 1$ minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, minden változójában balról folytonos és monoton növő
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) = 0$, $\lim\limits_{(x,y) \to (\infty,\infty)} F(x, y) = 1$

Együttes sűrűségfüggvény: $f(x, y) := \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$. Tulajdonságai:

- $0 \le f(x, y)$ minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén
- $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$

Ebből tudunk valószínűségeket számolni: $\mathbb{P}((X, Y) \in A) = \iint\limits_{A} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Peremeloszlás- és sűrűségfüggvény (marginális):

- $F_X(x) = \lim\limits_{y\to\infty} F(x,y)$, $F_Y(y) = \lim\limits_{x\to\infty} F(x,y)$
- $f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$, $f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$
- X és Y független, ha $F(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y)$, vagyis $f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$ minden x, y esetén

Feltételes eloszlás- és sűrűségfüggvény:

- $F_{X|Y}(x|y) = \mathbb{P}(X < x \,|\, Y = y) = \frac{1}{f_Y(y)}\cdot\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$, $F_{Y|X}(y|x) = \mathbb{P}(Y < y \,|\, X = x) = \frac{1}{f_X(x)}\cdot\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$
- $f_{X|Y}(x|y) = \frac{\partial F_{X|Y}(x|y)}{\partial x} = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$, $f_{Y|X}(y|x) = \frac{\partial F_{Y|X}(y|x)}{\partial y} = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$
- Folytonos Bayes-formula: $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X|Y}(x|y)\cdot f_Y(y)}{\int\limits_{\mathbb{R}} f_{X|Y}(x|y)\cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y}$

4. feladat Legyen X, Y együttes sűrűségfüggvénye $f(x,y) = c\cdot xy$ a $0 < x < 1$, $x^2 < y < \sqrt{x}$ tartományon (és nulla egyébként)!

(a) Számold ki c-t!

(b) Számold ki a peremsűrűségeket!

(c) Számold ki a feltételes sűrűségeket!

(d) Számold ki $\mathbb{E}(X)$-et és $\mathbb{E}(Y)$-t!

(e) Független-e X és Y? (Indokolj!)

5. feladat Egy villamosmérnök A4 zh eredménye elsősorban a ~~gyakorlatvezető hangulatától~~ készülésre szánt időtől függ, aminek az eloszlása egyenletes 0 és 30 óra között. Ha a hallgató x órát készült, akkor a zh százalékos eredményének eloszlása szintén egyenletes, de $3x$ és $3x+10$ százalék között. Ha tudjuk egy hallgató zh eredményét, akkor mit mondhatunk a készülésre szánt idejéről? (Vagyis adjuk meg a feltételes sűrűségfüggvényt!)

Geometriai valószínűségek

6. feladat A $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$ csúcsú háromszögön vett egyenletes eloszlás esetén határozzuk meg $Z = Y/X$ eloszlását!

7. feladat Egy (egységsugarú) körbe szabályos hatszöget rajzolunk. Mi a valószínűsége, hogy a körben egyenletesen választott pont a hatszögben is benne van?