Matematika A4 - Valószínűségszámítás 9. gyakorlat
Többváltozós eloszlások

Kovariancia, feltételes várható érték, feltételes variancia

- Kovariancia: $\mathrm{COV}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, ahol $\mathbb{E}(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \cdot xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
- Feltételes várható érték: $\mathbb{E}(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X \mid Y}(x \mid y) \cdot x \,\mathrm{d}x$
- Feltételes variancia: $\mathbb{D}^2(X \mid Y = y) = \mathbb{E}\left(X^2 \mid Y = y\right) - (\mathbb{E}(X \mid Y = y))^2$

1. feladat Legyen $f(x,y) = c/y$, ha $0 < x < 1$ és $x < y < 1/x$, egyébként pedig $f(x,y) = 0$.

(a) Határozzuk meg c értékét úgy, hogy $f(x,y)$ egy sűrűségfüggvény legyen!

(b) Határozzuk meg a peremeloszlás- és sűrűségfüggvényeket!

(c) Mik a feltételes eloszlás- és sűrűségfüggvények?

(d) Mennyi $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$, $\mathbb{E}(Y \mid X = x)$, $\mathbb{E}(XY)$, $\mathrm{COV}(X,Y)$?

(e) Független-e X és Y?

(f) Számoljuk ki a feltételes szórásnégyzeteket!

2. feladat Legyen (X,Y) eloszlása egyenletes azon a négyszögön, aminek a csúcsai

(a) $(1;1)$, $(3;1)$, $(3;2)$, $(1;2)$,

(b) $(1;0)$, $(0;1)$, $(-1;0)$, $(0;-1)$.

- Adjuk meg (X,Y) együttes sűrűségfüggvényét!
- Mik a marginális sűrűségfüggvények és várható értékek?
- Független-e X és Y?
- Mik a feltételes sűrűségfüggvények, várható értékek, varianciák?
- Mennyi $\mathbb{E}(XY)$ és $\mathrm{COV}(X,Y)$?

3. feladat Sűrűségfüggvények-e az alábbiak? Ha igen, adjuk meg a perem- és feltételes sűrűségfüggvényeket, várható értékeket, illetve a kovarianciát!

(a) $f(x,y) = \frac{4}{5}(x + xy + y)$, ha $0 < x < 1, 0 < y < 1$, egyébként $f(x,y) = 0$

(b) $f(x,y) = \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda(x+y)}$, ha $x, y > 0$, egyébként $f(x,y) = 0$