Matematika A4 - Valószínűségszámítás 9. gyakorlat
Többváltozós eloszlások

Kovariancia, feltételes várható érték, feltételes variancia

- Kovariancia: $\mathrm{COV}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, ahol $\mathbb{E}(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\cdot xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
- Feltételes várható érték: $\mathbb{E}(X \mid Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X\mid Y}(x\mid y)\cdot x\,\mathrm{d}x$
- Feltételes variancia: $\mathbb{D}^2(X\mid Y=y) = \mathbb{E}\left(X^2 \mid Y=y\right) - (\mathbb{E}(X\mid Y=y))^2$

1. feladat Legyen $f(x,y) = c/y$, ha $0<x<1$ és $x<y<1/x$, egyébként pedig $f(x,y)=0$.

(a) Határozzuk meg c értékét úgy, hogy $f(x,y)$ egy sűrűségfüggvény legyen!

(b) Határozzuk meg a peremeloszlás- és sűrűségfüggvényeket!

(c) Mik a feltételes eloszlás- és sűrűségfüggvények?

(d) Mennyi $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(X\mid Y=y)$, $\mathbb{E}(Y\mid X=x)$, $\mathbb{E}(XY)$, $\mathrm{COV}(X,Y)$?

(e) Független-e X és Y?

(f) Számoljuk ki a feltételes szórásnégyzeteket!

Megoldásvázlat

(a) $\int_0^1 \int_x^{1/x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 1$ feltételből adódik, hogy $c = 1/2$.

(b)
- $f_X(x) = \int_x^{1/x} \frac{1}{2y}\,\mathrm{d}y = -\ln x$, ha $x\in(0,1)$, egyébként $f_X(x)=0$.
- Ebből integrálással $F_X(x) = x(1-\ln x)$, ha $x\in(0,1)$.
- $f_Y(y) = \int_0^{\min(y,1/y)} \frac{1}{2y}\,\mathrm{d}x$, vagyis $f_Y(y) = 1/2$, ha $0<y<1$, $f_Y(y) = \frac{1}{2y^2}$, ha $y>1$.
- Ebből integrálással $F_Y(y) = \frac{y}{2}$, ha $0<y<1$ és $F_Y(y) = 1 - \frac{1}{2y}$, ha $y>1$.

(c)
- $f_{X\mid Y}(x\mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ alapján:
  ha $y\in(0,1)$, akkor $f_{X\mid Y}(x\mid y) = \frac{1}{y}$, ha $x\in(0,y)$, egyéb x esetén pedig 0, vagyis
  $$X\mid Y=y \sim \mathrm{UNI}(0,y),$$
  ha $y>1$, akkor $f_{X\mid Y}(x\mid y) = y$, ha $x\in\left(0,\frac{1}{y}\right)$, egyéb x esetén pedig 0, vagyis
  $$X\mid Y=y \sim \mathrm{UNI}\left(0,\frac{1}{y}\right).$$
- $F_{X\mid Y}(x\mid y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X\mid Y}(t\mid y)\,\mathrm{d}t$, amiből
  ha $y\in(0,1)$, akkor $F_{X\mid Y}(x\mid y) = \frac{x}{y}$, ha $0<x<y$
  ha $y>1$, akkor $F_{X\mid Y}(x\mid y) = xy$, ha $0<x<\frac{1}{y}$
  (itt az eloszlásfüggvényeket az alapján is fel tudtuk volna írni, hogy tudjuk, hogy a feltételes eloszlás egyenletes).
- $f_{Y\mid X}(y\mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{-1}{2y\ln x}$, ha $0<x<1$ és $x<y<\frac{1}{x}$, egyéb y esetén pedig 0
- $F_{Y\mid X}(y\mid x) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y\mid X}(t\mid x)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{\ln y}{2\ln x}$, ha $0<x<1$ és $x<y<\frac{1}{x}$.

(d)
- $\mathbb{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$
- $\mathbb{E}(Y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \infty$
- Mivel $X \,|\, Y$ feltételes eloszlás egyenletes (lásd (c) feladat), így a feltételes várható érték $\frac{y}{2}$, ha $0 < y < 1$ és $\frac{1}{2y}$, ha $y > 1$.
- $\mathbb{E}(Y \,|\, X = x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y f_{Y\,|\,X}(y \,|\, x)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{x}^{1/x} \frac{-1}{2 \ln x}\,\mathrm{d}y = \frac{x - \frac{1}{x}}{2 \ln x}$
- $\mathbb{E}(XY) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} xy f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{x}^{1/x} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \cdots = \frac{1}{3}$
- $\mathrm{COV}(X, Y)$ nem létezik, hiszen $\mathbb{E}(Y)$ sem létezik

(e) Nem, hiszen $f(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$.

(f)
- Láttuk, hogy $(X \,|\, Y = y)$ eloszlása egyenletes, így ebből a szórásnégyzet is könnyen meghatározható:
  $0 < y < 1$ esetén $\mathbb{D}^2(X \,|\, Y = y) = \frac{y^2}{12}$, míg $1 < y$ esetén $\mathbb{D}^2(X \,|\, Y = y) = \frac{1}{12y^2}$.
- $\mathbb{D}^2(Y \,|\, X = x)$ számolásához szükségünk van $\mathbb{E}\left(Y^2 \,|\, X = x\right)$-ra:

$$\mathbb{E}\left(Y^2 \,|\, X = x\right) = \int\limits_{x}^{1/x} y^2 \cdot \frac{-1}{2y \ln x}\,\mathrm{d}y = \cdots = \frac{x^2 - \frac{1}{x^2}}{4 \ln x}$$

Innen

$$\mathbb{D}^2(Y \,|\, X = x) = \mathbb{E}\left(Y^2 \,|\, X = x\right) - \left(\mathbb{E}(Y \,|\, X = x)\right)^2 = \frac{x^2 - \frac{1}{x^2}}{4 \ln x} - \left(\frac{x - \frac{1}{x}}{2 \ln x}\right)^2.$$

2. feladat Legyen (X, Y) eloszlása egyenletes azon a négyszögön, aminek a csúcsai

(a) $(1;1)$, $(3;1)$, $(3;2)$, $(1;2)$,

(b) $(1;0)$, $(0;1)$, $(-1;0)$, $(0;-1)$.

- Adjuk meg (X, Y) együttes sűrűségfüggvényét!
- Mik a marginális sűrűségfüggvények és várható értékek?
- Független-e X és Y?
- Mik a feltételes sűrűségfüggvények, várható értékek, varianciák?
- Mennyi $\mathbb{E}(XY)$ és $\mathrm{COV}(X, Y)$?

Megoldásvázlat

(a)
- A téglalap területe 2, így az együttes sűrűségfüggvény $f(x,y) = \frac{1}{2}$, ha $1 < x < 3$ és $1 < y < 2$, míg a téglalapon kívül $f(x,y) = 0$.
- Ha $1 < x < 3$, akkor

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{1}^{2} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}.$$

Vagyis $X \sim \mathrm{UNI}(1,\, 3)$, így $\mathbb{E}(X) = 2$.
Hasonlóan $1 < y < 2$ esetén

$$f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{3} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Vagyis $Y \sim \mathrm{UNI}(1,\, 2)$, így $\mathbb{E}(Y) = 1.5$.

- Jól látszódik, hogy $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ minden x, y esetén (a tartományra is figyelve). Tehát X és Y független.
- Függetlenség miatt a feltételes eloszlások megegyeznek a peremeloszlásokkal, így

$$f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y) = f_X(x) = \frac{1}{2}, \quad \text{ha } 1 < x < 3,\ 1 < y < 2,$$

$$\mathbb{E}(X\,|\,Y = y) = \mathbb{E}(X) = 2,\ \mathbb{D}^2(X\,|\,Y = y) = \mathbb{D}^2(X) = \frac{1}{3},$$

$$f_{Y\,|\,X}(y\,|\,x) = f_Y(y) = 1, \quad \text{ha } 1 < x < 3,\ 1 < y < 2,$$

$$\mathbb{E}(Y\,|\,X = x) = \mathbb{E}(Y) = 1.5,\ \mathbb{D}^2(Y\,|\,X = x) = \mathbb{D}^2(Y) = \frac{1}{12}.$$

- A szorzat várható értéke és a kovariancia

$$\mathbb{E}(XY) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_1^3 \int\limits_1^2 \frac{xy}{2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \cdots = 3$$

$$\mathrm{COV}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$$

(a függetlenség miatt is tudjuk, hogy a kovariancia 0).

(b)
- A négyzet területe 2, így az együttes sűrűségfüggvény $f(x,y) = \frac{1}{2}$ a négyzeten (azaz ha $-1 < x < 0$ és $-1 - x < y < x + 1$ vagy $0 < x < 1$ és $x - 1 < y < 1 - x$), míg a négyzeten kívül $f(x,y) = 0$.
- Az együttes sűrűségfüggvény integrálásából kapjuk, hogy $f_X(x) = x + 1$, ha $-1 < x < 0$ és $f_X(x) = 1 - x$ ha $0 < x < 1$. Egyéb x esetén pedig $f_X(x) = 0$.
  Hasonlóan (szimmetria miatt) $f_Y(y) = y+1$, ha $-1 < y < 0$ és $f_Y(y) = 1-y$, ha $0 < y < 1$. Egyéb y esetén pedig $f_Y(y) = 0$.
  A várható értékek definícióból számolhatók: $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$ (ez abból is következik, hogy a sűrűségfüggvények páros függvények).
- Jól látszódik, hogy $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ nem teljesül minden x, y esetén, így X és Y nem független.
- $f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$, így $-1 < y < 0$ esetén $f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y) = \frac{1}{2(y+1)}$, ha $x \in (-1-y, y+1)$, egyéb x esetén pedig 0. Vagyis ekkor $(X\,|\,Y = y)$ feltételes eloszlása $\mathrm{UNI}(-1-y, y+1)$. Ebből a feltételes várható érték és variancia is könnyen megállapítható:

$$\mathbb{E}(X\,|\,Y = y) = 0, \quad \mathbb{D}^2(X\,|\,Y = y) = \frac{(y+1)^2}{3}.$$

  $0 < y < 1$ esetén hasonlóan kapjuk, hogy $f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y) = \frac{1}{2(1-y)}$, ha $x \in (y-1, 1-y)$, azaz most $(X\,|\,Y = y)$ feltételes eloszlása $\mathrm{UNI}(y-1, 1-y)$. Ebből a feltételes várható érték és variancia:

$$\mathbb{E}(X\,|\,Y = y) = 0, \quad \mathbb{D}^2(X\,|\,Y = y) = \frac{(1-y)^2}{3}.$$

  Mivel az eloszlás szimmetrikus a változókra nézve, így $f_{Y\,|\,X}(y\,|\,x)$-t számolva ugyanezeket a feltételes sűrűségfüggvényeket, várható értékeket és szórásnégyzeteket kapjuk, csak X és Y (illetve x és y) szerepét mindenhol fel kell cserélni.
- $\mathbb{E}(XY) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \cdots = 0$ és így a kovariancia is 0 (de a változók nem függetlenek).

3. feladat Sűrűségfüggvények-e az alábbiak? Ha igen, adjuk meg a perem- és feltételes sűrűségfüggvényeket, várható értékeket, illetve a kovarianciát!

(a) $f(x,y) = \frac{4}{5}(x + xy + y)$, ha $0 < x < 1, 0 < y < 1$, egyébként $f(x,y) = 0$

(b) $f(x,y) = \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda(x+y)}$, ha $x, y > 0$, egyébként $f(x,y) = 0$

Megoldásvázlat

(a) Ellenőrizhető, hogy $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$, így ez egy sűrűségfüggvény. Korábbi feladatokban látott képleteket használva számolhatjuk a kérdezett mennyiségeket. (A számolások felét megspórolhatjuk, ha észrevesszük, hogy az eloszlás szimmetrikus a változókban.)

- $f_X(x) = \frac{6x+2}{5}$, ha $0 < x < 1$, egyéb x esetén pedig $f_X(x) = 0$.
  Hasonlóan (szimmetria miatt) $f_Y(y) = \frac{6y+2}{5}$, ha $0 < y < 1$, egyéb y esetén pedig $f_Y(y) = 0$.
  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \frac{3}{5}$
- Jól látszódik, hogy $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ nem teljesül minden x, y esetén, így X és Y nem független.
- $f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y) = \frac{2(x+xy+y)}{3y+1}$, míg $f_{Y\,|\,X}(y\,|\,x) = \frac{2(x+xy+y)}{3x+1}$ (mindkettő $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ esetén).
  $\mathbb{E}(X\,|\,Y = y) = \frac{5y+2}{9y+3}$, $\mathbb{E}(Y\,|\,X = x) = \frac{5x+2}{9x+3}$
  $\mathbb{E}\left(X^2\,|\,Y = y\right) = \frac{7y+3}{18y+6}$, $\mathbb{E}\left(Y^2\,|\,X = x\right) = \frac{7x+3}{18x+6}$
  $\mathbb{D}^2(X\,|\,Y = y) = \frac{13y^2+8y+1}{18(3y+1)^2}$, $\mathbb{D}^2(Y\,|\,X = x) = \frac{13x^2+8x+1}{18(3x+1)^2}$
- $\mathbb{E}(XY) = \frac{16}{45}$, $\mathrm{COV}(X,Y) = \frac{-1}{225}$.

(b) Ellenőrizhető, hogy $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$, így ez egy sűrűségfüggvény. Korábbi feladatokban látott képleteket használva számolhatjuk a kérdezett mennyiségeket. (A számolások felét megspórolhatjuk, ha észrevesszük, hogy az eloszlás szimmetrikus a változókban.)

- $f_X(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$, ha $0 < x$ (egyéb x esetén pedig $f_X(x) = 0$), vagyis $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$. Hasonlóan $Y \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$. Emiatt $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\lambda}$.
- Jól látszódik, hogy $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ teljesül minden x, y esetén, így X és Y független.
- Függetlenség miatt a feltételes sűrűségfüggvények, várható értékek és szórásnégyzetek megegyeznek a peremeloszlás ($\mathrm{EXP}(\lambda)$) megfelelő mennyiségeivel:

$$f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad f_{Y\,|\,X}(y\,|\,x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y} \qquad 0 < x, 0 < y,$$

$$\mathbb{E}(X\,|\,Y = y) = \mathbb{E}(Y\,|\,X = x) = \frac{1}{\lambda},$$

$$\mathbb{D}^2(X\,|\,Y = y) = \mathbb{D}^2(Y\,|\,X = x) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

- $\mathbb{E}(XY) \overset{\text{függetlenség}}{=} \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\lambda^2}$, $\mathrm{COV}(X,Y) = 0$.