

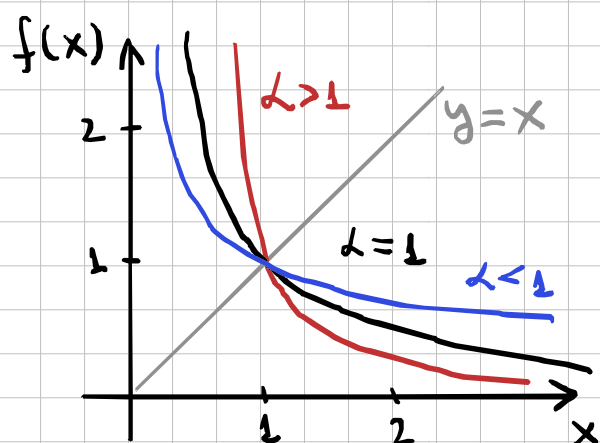
Improprius Integrál

Az $y = x^\lambda$ ($x > 0, \lambda > 0$) függvény improprius integráljait vizsgáljuk.

$$x = y^{1/\lambda}$$

$y = x$ egyenesre való tükrözés

$$\leftrightarrow \lambda \mapsto 1/\lambda$$

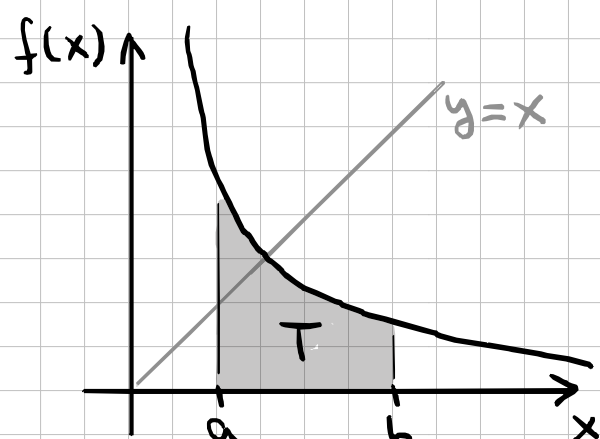


Speciális eset: $\lambda = 1$

a) Határozott integrál:

- határozott terület mérete

$$T = \int_a^b 1/x \, dx = \ln b - \ln a \\ = \ln b/a$$



- Emlékeztető. Newton-Leibniz-Stabály:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a), \text{ ahol } F'(x) = f(x)$$

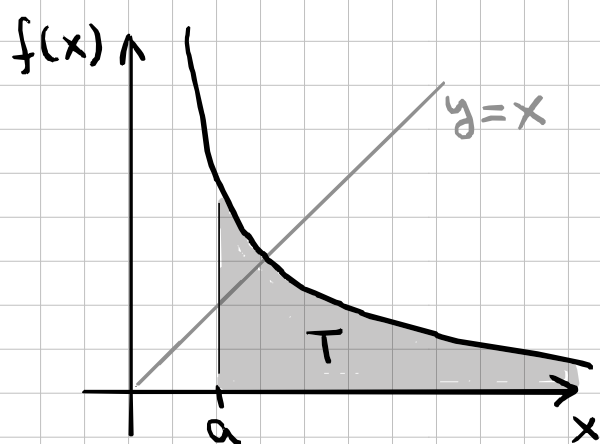
- Emlékeztető. $1/x$ (egy) primitív függvénye:

$$f(x) = 1/x \leftrightarrow F(x) = \ln|x|$$

- most $a, b > 0$, ezért $\ln|a| = \ln a$ és $\ln|b| = \ln b$.

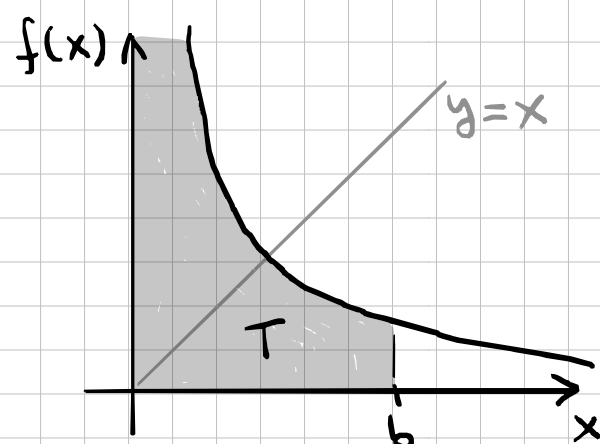
b) Improprius integrál: az integrálási tartomány végtelen. Most: $[a, \infty)$.

$$T = \int_a^\infty 1/x \, dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b 1/x \, dx \\ = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln \underbrace{b/a}_{\infty} = \infty$$



c) Improprius integrál: az integrálási tartomány valamely pontja „problémás”. Most: $[0, b]$, és $1/x$ -nek függőleges aszimptotája van $x = 0$ -ban.

$$T = \int_0^b 1/x \, dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^b 1/x \, dx \\ = \lim_{a \rightarrow 0} \ln \underbrace{b/a}_{\infty} = \infty$$



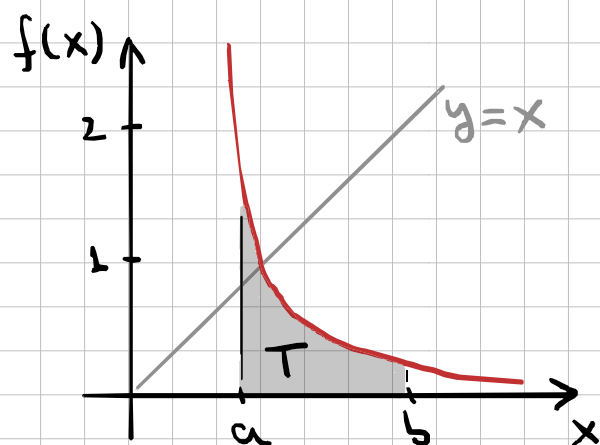
Speciális eset: $\lambda = 2$

a) Határozott integrál $[a, b]$ -n:

$$\int_a^b 1/x^2 \, dx = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

b) Improprius integrál $[a, \infty)$ -en:

$$\int_a^\infty 1/x^2 \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{a}$$



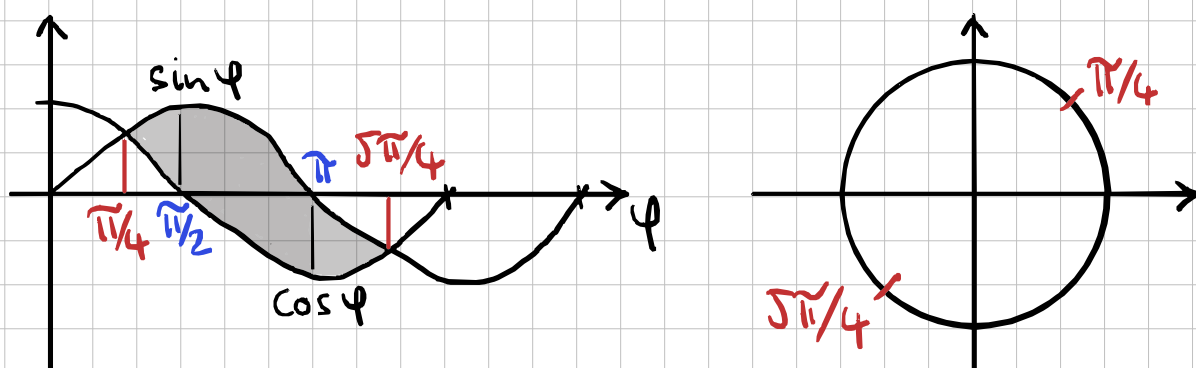
c) Improprius integrál $[0, b]$ -n:

$$\int_0^b 1/x^2 \, dx = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \infty$$

Két görbe közé eső terület

Általános formula: $T = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$

Példa:



Két terület méretét számoljuk: - világos + sötét szürke
- sötét szürke

Az alábbi, általánosabb eredményre szükség lesz:

$$T = \int_a^b (\sin \varphi - \cos \varphi) d\varphi = [-\cos \varphi - \sin \varphi]_a^b \\ = \cos a + \sin a - \cos b - \sin b$$

Most megválasztjuk az integrálási tartomány határait:

a) világos + sötét szürke: $a = \pi/4$, $b = 5\pi/4$

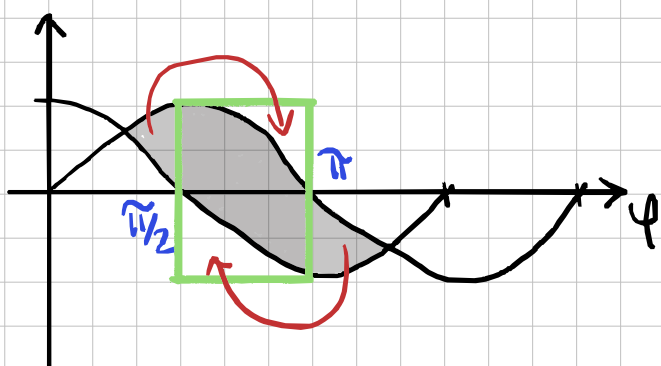
$$T_1 = \underbrace{\cos \pi/4}_{1/\sqrt{2}} + \underbrace{\sin \pi/4}_{1/\sqrt{2}} - \underbrace{\cos 5\pi/4}_{-1/\sqrt{2}} - \underbrace{\sin 5\pi/4}_{-1/\sqrt{2}} \\ = 4/\sqrt{2} \approx 2,83$$

b) sötét szürke: $a = \pi/2$, $b = \pi$

$$T_2 = \underbrace{\cos \pi/2}_0 + \underbrace{\sin \pi/2}_1 - \underbrace{\cos \pi}_{-1} - \underbrace{\sin \pi}_0 = 2$$

Kis ellenőrzés, hogy jól számoltunk:

- a "zöld" téglalap területe $2 \cdot \pi/2 = \pi \approx 3,14$
- a két "világosszürke" részt majdnem kipótolja a hiányzó részektől, így a 2,83 jónak tűnik



Az integrálás további alkalmazásai

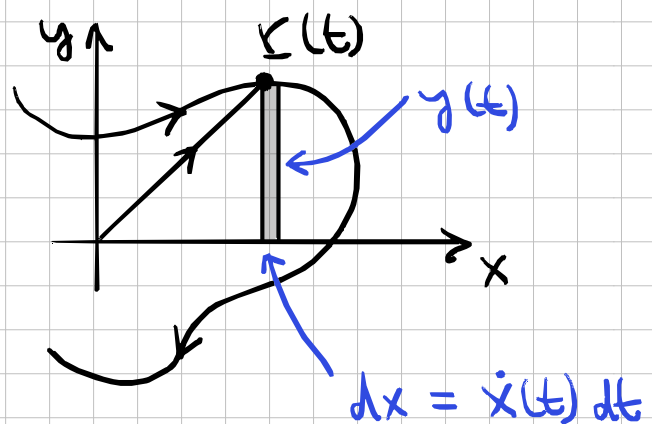
1. Görbe alatti terület paraméteres megadás esetén

- Görbe paraméteres megadása Descartes-rendszerben:

$$\underline{r}(t) = (x(t), y(t))$$

$$\int_{t_1}^{t_2} y(t) \dot{x}(t) dt$$

$$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt}$$



- A kis téglalap területe: $y(t) \dot{x}(t) dt$
- Az integrálással ezeket „összegezzük”

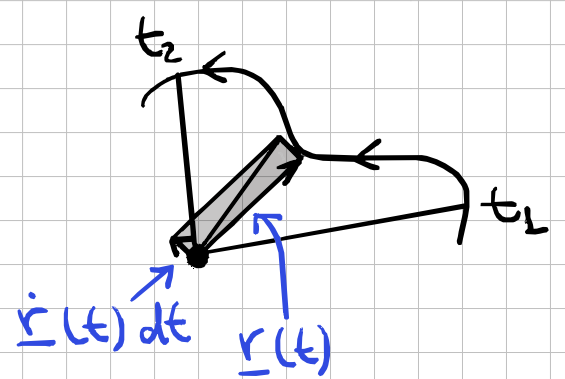
2. Szelettartomány területe:

- a) Paraméteresen, Descartes-koordinátákkal:

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} |x(t) \dot{y}(t) - y(t) \dot{x}(t)| dt$$

$$\underline{r}(t) = (x(t), y(t))$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$



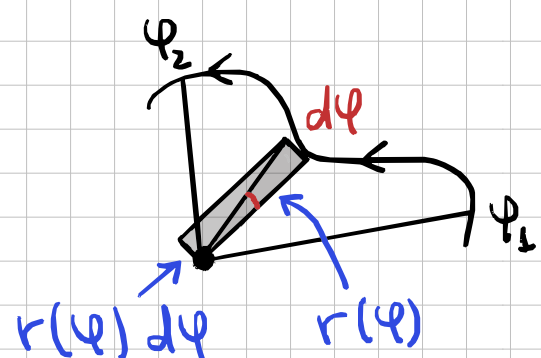
- A kis sötétstírt háromszög területe (lásd a vektoriális szorzat kapcsán tanultakat):

$$\frac{1}{2} |\underline{r}(t) \times \dot{\underline{r}}(t) dt| = \frac{1}{2} |x(t) \dot{y}(t) - y(t) \dot{x}(t)| dt$$

- A formula csak akkor adja meg helyesen a területet, ha a vektoriális szorzat nem vált előjelet, és a $|\dots|$ csak azért kell, hogy ne kapjunk negatív értéket.
- A szelettartomány területe ezt „összegezéssel”, azaz integrálással adódik

- b) Polárkoordinátákkal:

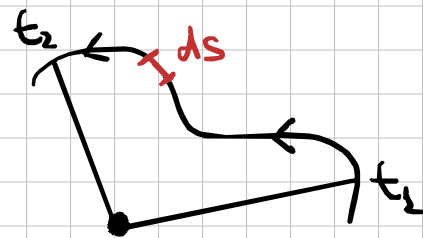
$$\frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi)^2 d\varphi$$



3. Ívhossz:

- a) Paraméteresen, Descartes-koordinátákkal:

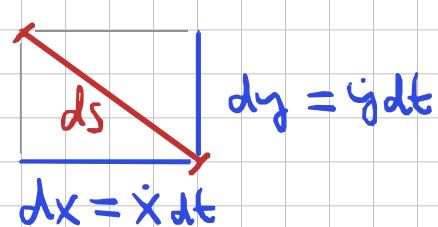
$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$



- A kis piros ív elem a koordinátatengelyekkel párhuzamos komponensekre bontható, és így a hossza a Pitagorasz-tételből adódik:

$$ds = \sqrt{(\dot{x} dt)^2 + (\dot{y} dt)^2}$$

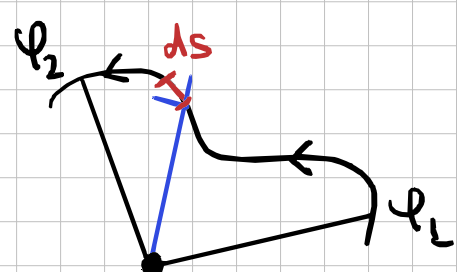
$$= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$



- Most a kis ív elemet hosszát „összegezzük”

- b) Polárkoordinátákkal:

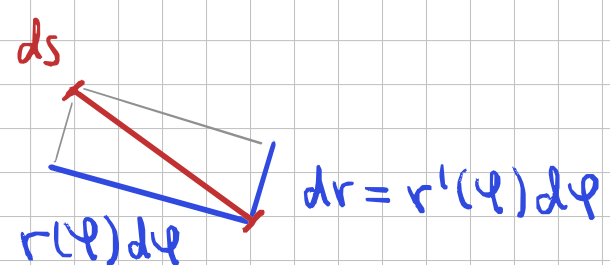
$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} d\varphi$$



- A kis piros ív elemet most a helyvektorral párhuzamos és az arra merőleges komponensekre bontjuk:

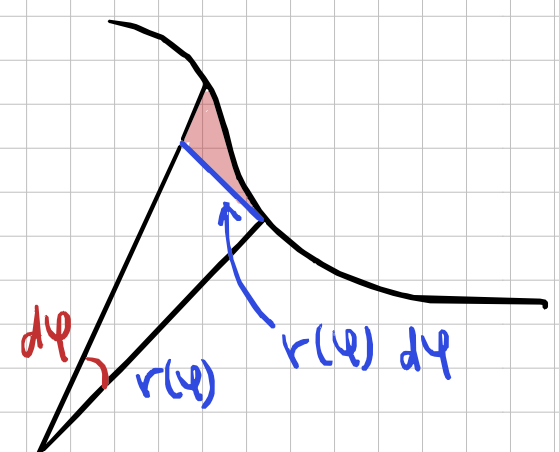
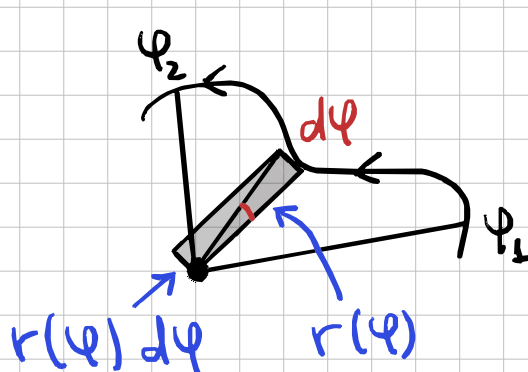
$$ds = \sqrt{(r(\varphi) d\varphi)^2 + (r'(\varphi) d\varphi)^2}$$

$$= \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} d\varphi$$



Megjegyzés. A területet kiszámolása első ránézésre nem tűnik pontosnak. Pl. ha kinagyítjuk a szelettartomány területének a számításához tartozó ábrát, amikor a görbe polárkoordinátákkal van megadva,

- látványos nem a teljes tartomány van figyelembe véve (a pirossal jelölt tartomány mintha el lenne hanyagolva),
- egy egyenes szakasz hossza egy körív hosszaként van kezelve.



Ez azért tehető meg, mert $d\varphi$ -re gondolhatunk úgy, mint egy nullába tartó mennyiségre, a „hiba” pedig $d\varphi^2$ nagyságrendű, azaz még $d\varphi$ -nél is gyorsabban tart nullába (legalábbis ezt feltételezzük).

Példa: kardoid

Polárkoordinátákkal megadva:

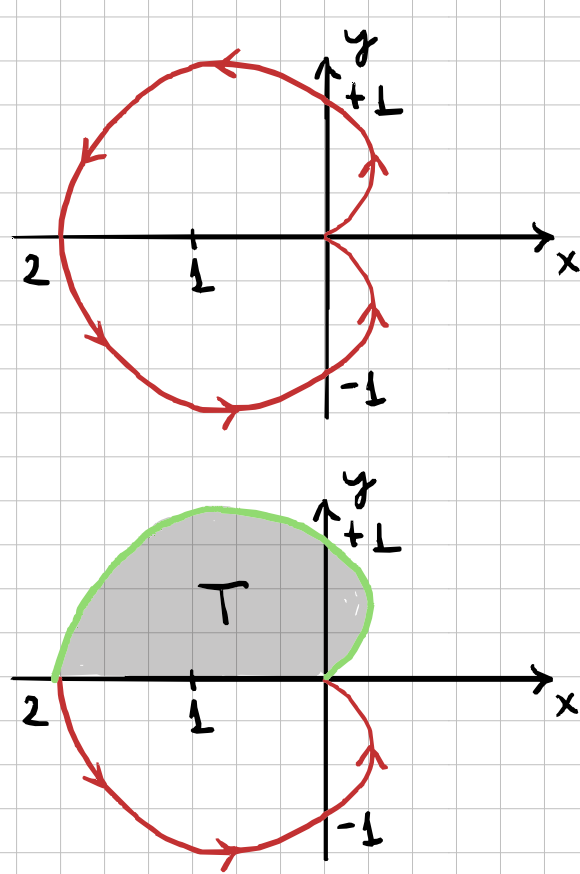
$$r(\varphi) = 1 - \cos \varphi$$

Amit kiszámoltunk:

- a zöld görbe ívhossza,
- az alatta lévő tartomány területe.

Kelleni fog, hogy

$$r'(\varphi) = \sin \varphi$$



a)

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} d\varphi \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi$$

$$r(\varphi)^2 = 1 - 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi$$

$$r'(\varphi)^2 = \sin^2 \varphi$$

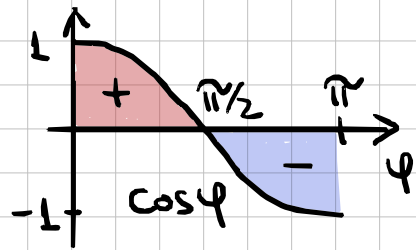
$$r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2 = 2(1 - \cos \varphi) = 4 \sin^2 \varphi / 2$$

- Az utolsó lépésben a $\sin^2 x = 1/2(1 - \cos x)$ lineáritáló formula lett felhasználva

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \sqrt{4 \sin^2 \varphi / 2} d\varphi && \leftarrow \text{az intervallumban,} \\ &= \int_0^\pi 2 \sin \varphi / 2 d\varphi && \text{amelyen integrálunk,} \\ &= -4 \int_0^\pi \left(-\frac{1}{2} \sin \varphi / 2\right) d\varphi && \leftarrow \frac{d}{d\varphi} \cos \varphi / 2 = -\frac{1}{2} \sin \varphi / 2 \\ &= -4 \left[\cos \varphi / 2 \right]_0^\pi \\ &= -4 (\cos \pi / 2 - \cos 0) = 4 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi)^2 d\varphi \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^\pi 1 d\varphi}_{\pi/2} - \underbrace{\int_0^\pi \cos \varphi d\varphi}_0 + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos^2 \varphi d\varphi \end{aligned}$$



- Az utolsó integrálra használjuk a lineáritáló formulát:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \int_0^\pi (1 + \cos 2\varphi) d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \int_0^\pi \cos 2\varphi d\varphi = \frac{3\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d(2\varphi) = 0 \end{aligned}$$

Számolásot Descartes-koordinátarendszerben

Kardoid paraméteres megadása:

$$x(t) = (1 - \cos t) \cos t$$

$$y(t) = (1 - \cos t) \sin t$$

a) Zöld görbe ívhossza:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \\ \dot{x}(t) &= \sin t \cos t - \underbrace{(1 - \cos t) \sin t}_{y(t)} \\ \dot{y}(t) &= \sin^2 t + \underbrace{(1 - \cos t) \cos t}_{x(t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 &= \sin^2 t \cos^2 t - 2y \sin t \cos t + y^2 \\ \dot{y}^2 &= \sin^2 t \sin^2 t + 2x \sin^2 t + x^2 \\ &\quad \sin^2 t \quad \quad \quad 0 \quad \quad (1 - \cos t)^2 \end{aligned}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \sin^2 t + (1 - \cos t)^2 = 2(1 - \cos t)$$

- Ugyanazt a kifejezést kell integrálni, mint polárkoordinátás megadás esetén. Ez nem meglepő: az $r(\varphi)$ polárkoordinátákkal megadott görbe Descartes-rendszerbeli alakja:

$$x(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi \quad x'(\varphi) = r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi$$

$$y(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi \quad y'(\varphi) = r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi$$

$$x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2 = r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2$$

b) Zöld görbe alatti tartomány területe:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^\pi |x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)| dt$$

- A $|\dots|$ -ban lévő kifejezés nem vált előjelet, ezért a $|\dots|$ elhagyásával legfeljebb (de nem kötelező módon) a terület -1 -szeresét kapjuk.

$$x(t)\dot{y}(t) = x(t) \sin^2 t + x(t)^2$$

$$\begin{aligned} -y(t)\dot{x}(t) &= -y(t) \sin t \cos t + y(t)^2 \\ &\quad 0 \quad \quad \quad + \quad (1 - \cos t)^2 \end{aligned}$$

- Most is ugyanazt a kifejezést kell integrálni, mint polárkoordinátás megadás esetén.

A görbe alatti tartomány területére egy másik formulánk is van:

$$T = \int_0^\pi y(t) \dot{x}(t) dt$$

$$\begin{aligned} y(t) \dot{x}(t) &= y(t) \sin t \cos t - y(t)^2 \\ &= (1 - \cos t) \sin^2 t \cos t - (1 - \cos t)^2 \sin^2 t \\ &= \sin^2 t [\cos t - \cos^2 t - 1 + 2 \cos t - \cos^2 t] \\ &= \sin^2 t [3 \cos t - 2 \cos^2 t - 1] \end{aligned}$$

- A lineáritáló formulát segítségével ez a kifejezés $\cos(kt)$ alakú tagok összegére alakítható, és így az integrálás elvégezhető.

Emlékeztető. A lineáritáló formulát bizonyítása:

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 t - \sin^2 t &= \cos 2t \\ \cos^2 t + \sin^2 t &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) \\ \cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) \end{cases}$$

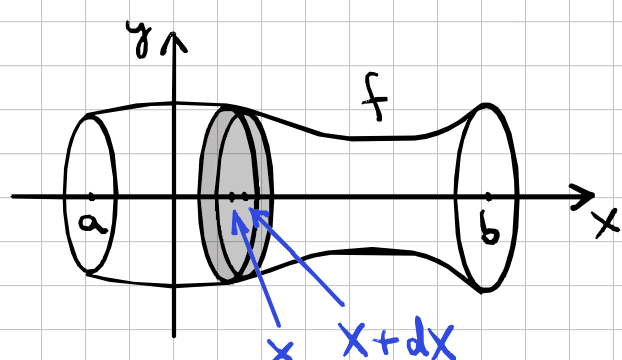
Forgástestek vizsgálata

Térfogat

Az f függvény által meghatározott forgástestet kis, dx magasságú hengerekre bontjuk, majd ezek térfogatait összegezzük. Egy ilyen henger térfogata:

$\pi f(x)^2 dx$,
amiből a forgástest térfogata

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

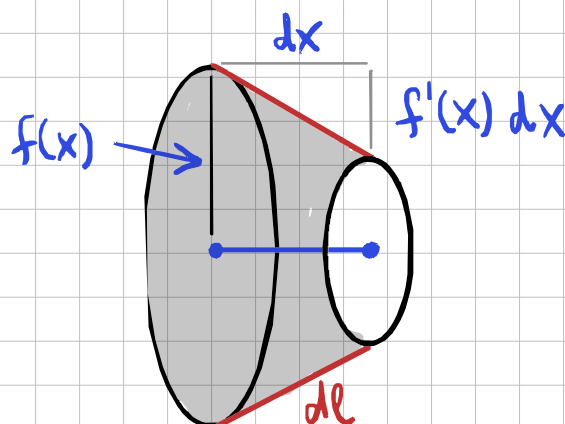
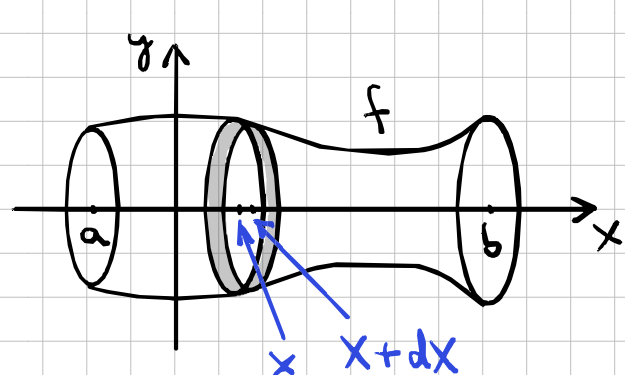


Ha a forgástestet paraméteresen megadott görbe határozza meg, $dx = \dot{x}(t) dt$ és

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} (y(t))^2 \dot{x}(t) dt.$$

Felszín

A forgástest felstínét kis, dx magasságú csontakúpot palástjaira bontjuk:



A csontakúp alkotójának a hossza:

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (f'(x) dx)^2} = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

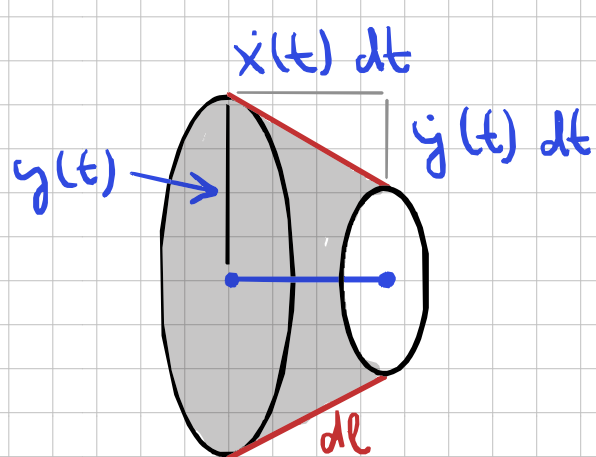
A csontakúp palástjának a felstíne, közelítőleg:

$$2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Ezest összegezve, a forgástest felstíne:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

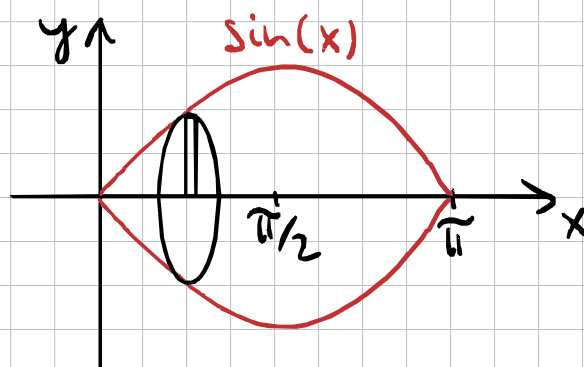
Ha a forgástestet paraméteresen megadott görbe határozza meg:



$$dl = \sqrt{(\dot{x}(t) dt)^2 + (\dot{y}(t) dt)^2} = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

$$A = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{x}(t)^2} dt$$

Példa: $f(x) = \sin x$
 $f'(x) = \cos x$



Térfogat:

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi^2}{2}$$

Felstín:

$$A = 2\pi \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$$

- Vezessük be az u változót az alábbi módon:

$$u = \cos x \rightarrow du = -\sin x dx$$

- Az integrál új változóval való felírásánál ügyeljünk a határookra:

$$x = 0 \leftrightarrow u = 1, \quad x = \pi \leftrightarrow u = -1,$$

$$\int_0^{\pi} (\dots) \sin x dx = \int_1^{-1} (\dots) (-du) = \int_{-1}^1 (\dots) du,$$

tehát

$$A = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 + u^2} du$$

- Vezessük be a v változót az alábbi módon:

$$u = \operatorname{sh} v, \quad du = \operatorname{ch} v dv,$$

$$u = \pm 1 \leftrightarrow v = \operatorname{arsh}(\pm 1) = \pm \operatorname{arsh}(1).$$

Tehát, tudva azt, hogy $\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x$,

$$A = 2\pi \int_{\operatorname{arsh}(-1)}^{\operatorname{arsh}(1)} \operatorname{ch}^2 v dv \quad \leftarrow \operatorname{ch}^2 v = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{ch} 2v)$$

$$= \pi \int_{\operatorname{arsh}(-1)}^{\operatorname{arsh}(1)} (1 + \operatorname{ch} 2v) dv \quad \leftarrow \operatorname{ch} 2v = \frac{d}{dv} \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2v$$

$$= \pi [\operatorname{arsh}(1) - \operatorname{arsh}(-1)]$$

$$+ \frac{\pi}{2} [\operatorname{sh}(2 \operatorname{arsh}(1)) - \operatorname{sh}(2 \operatorname{arsh}(-1))]$$

$$= 2\pi \underbrace{\operatorname{arsh}(1)}_{\ln(\sqrt{2}+1)} + \pi \underbrace{\operatorname{sh}(2 \operatorname{arsh}(1))}_{2\sqrt{2}} \quad \text{Mivel a fv.-et páratlanos}$$

$$= 2\pi [\ln(\sqrt{2}+1) + \sqrt{2}]$$

A számolásokról részletei (összefüggések a köv. oldalon):

$$\operatorname{arsh}(1) - \operatorname{arsh}(-1) = 2 \operatorname{arsh}(1) = \ln(\sqrt{2}+1)$$

$$2 \operatorname{arsh}(1) = \ln[(\sqrt{2}+1)^2]$$

$$\exp 2 \operatorname{arsh}(1) = (\sqrt{2}+1)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$\exp(-2 \operatorname{arsh}(1)) = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\operatorname{sh} 2 \operatorname{arsh}(1) = 2\sqrt{2}$$

Hiperbolikus függvények néhány tulajdonsága

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \rightarrow \operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x \quad (\text{páratlan})$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \rightarrow \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x \quad (\text{páros})$$

Linearizáló formulák

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} - 2)$$

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2)$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) = \operatorname{ch} 2x$$

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1), \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1).$$

Inverz hiperbolikus függvények

$$y = \frac{1}{2}(e^x \pm e^{-x}) \quad z \equiv e^x$$

$$y = \frac{1}{2}(z \pm 1/z) \quad / \cdot 2z \quad 2yz = z^2 \pm 1$$

$$z^2 - 2yz \pm 1 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}(2y \pm \sqrt{4y^2 \mp 4}) = y \pm \sqrt{y^2 \mp 1}$$

$$x = \ln(y \pm \sqrt{y^2 \mp 1})$$

- A logaritmus argumentumának pozitívnak kell lennie, ezért

$$\operatorname{arsh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- $\operatorname{ch} x$ -nek csak egy megfelelő megszorítása invertálható, és az inverz függvény

$$\operatorname{arch} y = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}), \quad x \in [1, \infty)$$

- Az arsh függvény páratlan:

$$\operatorname{arsh}(-y) = \ln(\sqrt{y^2 + 1} - y) = -\operatorname{arsh} y$$

$$- \text{Ez abból látszik, hogy } \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1} + y} = \sqrt{y^2 + 1} - y$$