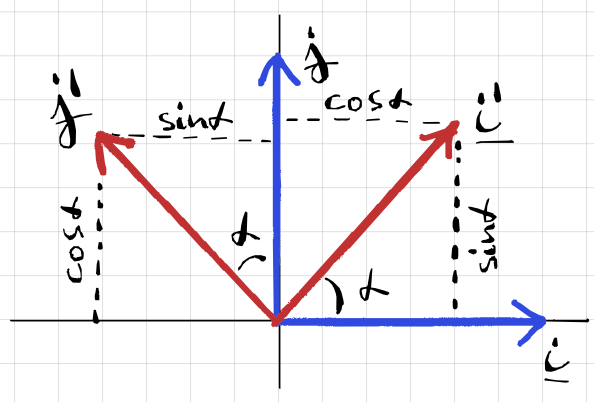
Forgatás 2D-ben



$$\underline{i} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \mapsto \underline{i}' = \begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{bmatrix}$$

$$\underline{j} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \mapsto \underline{j}' = \begin{bmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{bmatrix}$$

A transzformáció mátrixa:

$$\underline{\underline{R}}(\alpha) = \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

Példa. Forgatás 60°-kal:

$$\underline{\underline{R}}(60°) = \begin{bmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \qquad \underline{v}' = \underline{\underline{R}}(60°)\underline{v} = \begin{bmatrix}1-\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}+1/2\end{bmatrix}$$

A forgatás nem változtatja a vektor hosszát:

$$\|\underline{v}\|^2 = 2^2 + 1 = 5$$

$$\|\underline{v}'\|^2 = (1-\sqrt{3}/2)^2 + (\sqrt{3}+1/2)^2$$

$$= \underline{1} \underline{-\sqrt{3}} \underline{+3/4} + \underline{3} \underline{+\sqrt{3}} + \underline{1/4}$$

$$= 4 + 0 + 1 = 5 \quad \checkmark$$

– Általánosan:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \qquad \|\underline{v}\|^2 = x^2 + y^2$$

$$\underline{v}' = \underline{\underline{R}}(\alpha)\underline{v} = \begin{bmatrix}x\cos\alpha - y\sin\alpha\\ x\sin\alpha + y\cos\alpha\end{bmatrix}$$

$$\|\underline{v}'\|^2 = (x\cos\alpha - y\sin\alpha)^2 + (x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2$$

$$= x^2\cos^2\alpha - 2xy\sin\alpha\cos\alpha + y^2\sin^2\alpha +$$

$$\underbrace{x^2\sin^2\alpha}\ \underbrace{+2xy\sin\alpha\cos\alpha}\ \underbrace{+y^2\cos^2\alpha}$$

$$x^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = x^2 \qquad = 0 \qquad y^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = y^2$$

$$= x^2 + y^2 = \|\underline{v}\|^2$$

Egymás utáni forgatások mátrixa:

$$\underline{\underline{R}}(30°)\underline{\underline{R}}(60°) = \begin{bmatrix}\sqrt{3}/2 & -1/2\\ 1/2 & \sqrt{3}/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\sqrt{3}/4 - \sqrt{3}/4 & -3/4 - 1/4\\ 1/4 + 3/4 & -\sqrt{3}/4 + \sqrt{3}/4\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \underline{\underline{R}}(90°) = \underline{\underline{R}}(30° + 60°)$$

– Általánosan:

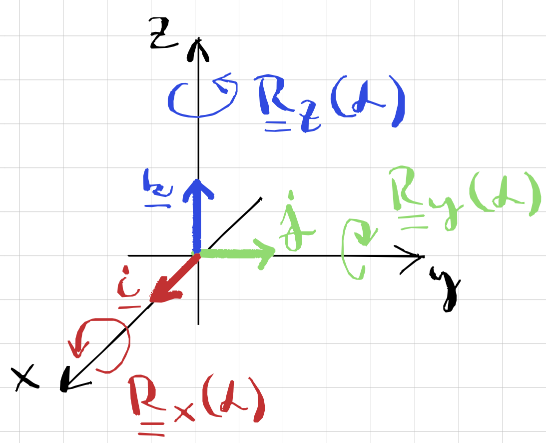
$$\underline{\underline{R}}(\beta)\underline{\underline{R}}(\alpha) = \begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\beta\sin\alpha - \cos\alpha\sin\beta\\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{bmatrix} = \underline{\underline{R}}(\alpha+\beta)$$

Tengely körüli forgatás 3D-ben

Koordinátatengelyek körüli forgatások:



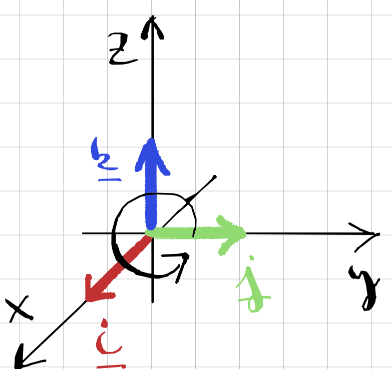
$$\underline{\underline{R}}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & \\ \sin\alpha & \cos\alpha & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

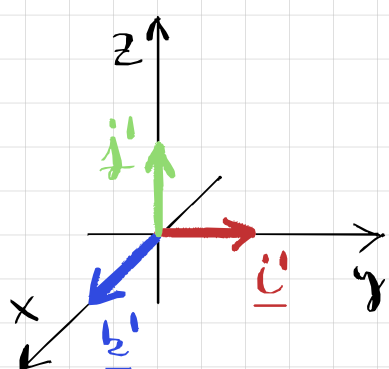
$$\underline{\underline{R}}_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

– Azt kell végiggondolni, hogy mi történik $\underline{i}$-vel, $\underline{j}$-vel és $\underline{k}$-val, illetve hogyan tudjuk ezt visszavezetni a 2D forgatásra

$$\underline{\underline{R}}_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & & -\sin\alpha \\ & 1 & \\ \sin\alpha & & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

(1,1,1) irányú tengely körüli 120°-os forgatás:





$$\underline{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{i}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{j}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{k}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{R}}_{(1,1,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{R}}^2_{(1,1,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{R}}^3_{(1,1,1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{I}}_3$$

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \underline{v}' \equiv \underline{\underline{R}}_{(1,1,1)}\underline{v} = \begin{bmatrix} z \\ x \\ y \end{bmatrix} \qquad \underline{v}'' \equiv \underline{\underline{R}}^2_{(1,1,1)}\underline{v} = \begin{bmatrix} y \\ z \\ x \end{bmatrix}$$

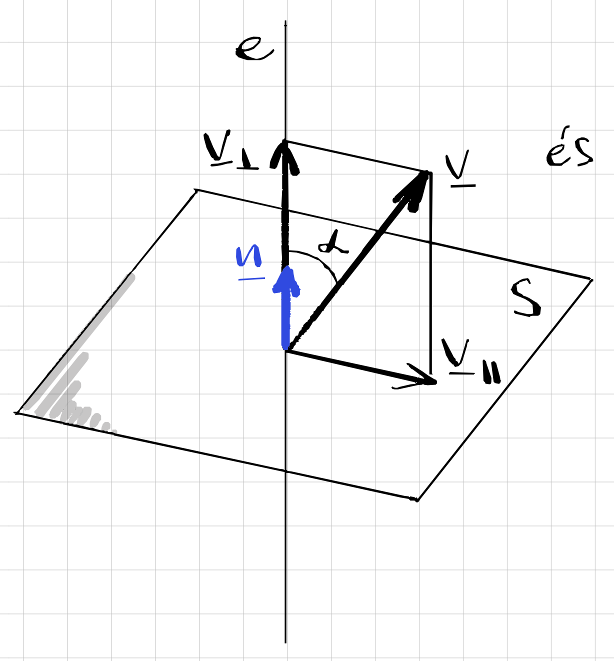
HF: $\|\underline{v}\| = \|\underline{v}'\| = \|\underline{v}''\|$?

Vetítések, tükrözések síkra (és egyenesre)

Az $\underline{n}$ vektor legyen az S sík normálvektora és az e egyenes irányvektora:

$$S = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \underline{n}, \underline{x} \rangle = 0 \}$$
$$e = \{ t\underline{n} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

- Mindkettő átmegy az origón és $S \perp e$
- Megkönnyíti a dolgunkat, ha feltesszük, hogy $\|\underline{n}\| = 1$



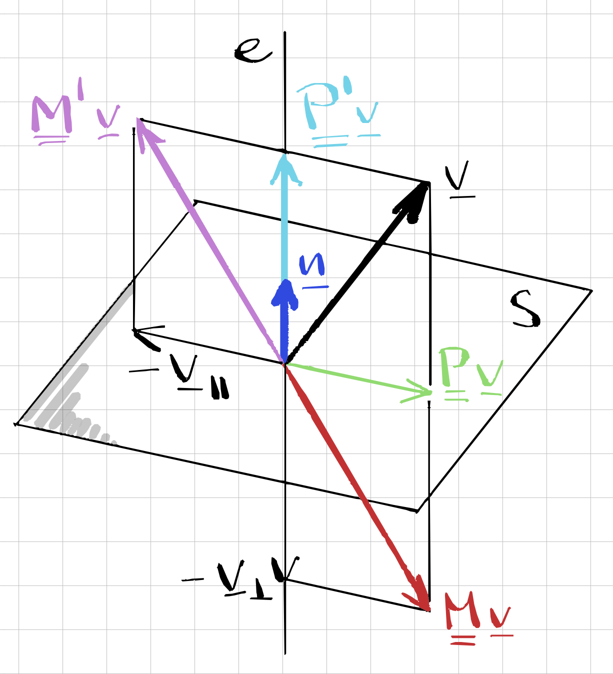
és

$\underline{v}$ felbontása: $\underline{v} = \underline{v}_\parallel + \underline{v}_\perp$

$\underline{v}_\perp = \langle \underline{n}, \underline{v} \rangle \underline{n}$

$\underline{v}_\parallel$: síkkal párhuzamos komponens

$\underline{v}_\perp$: síkra merőleges komponens



Síkra vett vetület: $\underline{\underline{P}}\underline{v}$

Síkra vett tükörkép: $\underline{\underline{M}}\underline{v}$

Egyenesre vett vetület: $\underline{\underline{P}}'\underline{v}$

Egyenesre vett tükörkép: $\underline{\underline{M}}'\underline{v}$

A transzformációk mátrixai:

$$\underline{\underline{P}}, \underline{\underline{M}}, \underline{\underline{P}}', \underline{\underline{M}}' \in \mathbb{R}^{3\times3}$$

$$\underline{\underline{P}}\underline{v} = \underline{v} - \underline{v}_\perp = \underline{v} - \langle \underline{n}, \underline{v} \rangle \underline{n} \qquad (= \underline{v}_\parallel)$$
$$\underline{\underline{M}}\underline{v} = \underline{v} - 2\underline{v}_\perp = \underline{v} - 2\langle \underline{n}, \underline{v} \rangle \underline{n}$$
$$\underline{\underline{P}}'\underline{v} = \underline{v} - \underline{v}_\parallel = \langle \underline{n}, \underline{v} \rangle \underline{n} \qquad (= \underline{v}_\perp)$$
$$\underline{\underline{M}}'\underline{v} = \underline{v} - 2\underline{v}_\parallel = 2\langle \underline{n}, \underline{v} \rangle \underline{n} - \underline{v} \qquad (= -\underline{\underline{M}}\underline{v})$$

Példa.

$$\underline{n} = 1/\sqrt{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longleftarrow$$

Általános vektorral dolgozom, hogy tudjam majd a vetítés mátrixát leolvasni

$$\underline{v}_\perp = \langle \underline{n}, \underline{v} \rangle \underline{n}$$
$$= 1/3\,(x+y+z)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{P}}\underline{v} = \underline{v} - \underline{v}_\perp$$
$$= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2x-y-z \\ -x+2y-z \\ -x-y+2z \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{Síkra vetítés } \underline{\underline{P}} \text{ mátrixa}}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}}\underline{v} = \underline{v} - 2\underline{v}_\perp$$
$$= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} x-2y-2z \\ -2x+y-2z \\ -2x-2y+z \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Síkra tükrözés } \underline{\underline{M}} \text{ mátrixa}}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

HF: Ellenőrizni, hogy $\underline{\underline{P}}^2 = \underline{\underline{P}}$ és $\underline{\underline{M}}^2 = \underline{\underline{I}}$

HF: Mi lesz $\underline{\underline{P}}'$ és $\underline{\underline{M}}'$? Rájuk igazak az összefüggések?

Síkra vetítés és tükrözés mátrixa általánosan:

$$\underline{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \qquad \underline{v}_\perp = \langle \underline{n}, \underline{v} \rangle \underline{n} = \underbrace{\begin{bmatrix} n_x n_x & n_x n_y & n_x n_z \\ n_y n_x & n_y n_y & n_y n_z \\ n_z n_x & n_z n_y & n_z n_z \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}}_{\underline{n}} \underbrace{\begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}}_{\underline{n}^T} \equiv \underline{n}\underline{n}^T$$

„diád"

„n transzponált"

- Vetítés mátrixa: $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{I}}_3 - \underline{n}\underline{n}^T$
- Tükrözés mátrixa: $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{I}}_3 - 2\underline{n}\underline{n}^T$

$$\underline{\underline{P}}^2 = (\underline{\underline{I}}_3 - \underline{n}\underline{n}^T)^2$$
$$= \underbrace{\underline{\underline{I}}_3^2}_{=\underline{\underline{I}}_3} - 2\underbrace{\underline{\underline{I}}_3\underline{n}\underline{n}^T}_{=\underline{n}\underline{n}^T} + \underbrace{(\underline{n}\underline{n}^T)^2}_{=\underline{n}\underbrace{\underline{n}^T\underline{n}}_{[1]}\underline{n}^T = \underline{n}\underline{n}^T}$$
$$= \underline{\underline{I}}_3 - \underline{n}\underline{n}^T = \underline{\underline{P}}$$

- Miért? Először is a mátrixszorzás asszociatív, azaz

$$\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}) = (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}},$$ feltéve, hogy a szorzások lehetségesek

$$\underline{n}\underline{n}^T\underline{n}\underline{n}^T = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}$$

$$1\times1\text{-es mátrix} \rightarrow \begin{bmatrix} n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\underline{n}\|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}}_{= [n_x, n_y, n_z]} = \underline{n}\underline{n}^T$$

$$\underline{\underline{M}}^2 = (\underline{\underline{I}}_3 - 2\underline{n}\underline{n}^T)^2$$
$$= \underline{\underline{I}}_3^2 - 4\underbrace{\underline{\underline{I}}_3\underline{n}\underline{n}^T}_{=\underline{n}\underline{n}^T} + 4\underbrace{(\underline{n}\underline{n}^T)^2}_{=\underline{n}\underline{n}^T\text{, láttuk előbb}} = \underline{\underline{I}}_3$$

Konvenció: oszlopvektorok $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

- Mátrixszorzás? Nem lehetséges a méretek miatt!

Mátrix transzponáltja (általában): "sorokból oszlopok és fordítva"

- Pl.,
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}$$

Most: oszlopvektor → sorvektor

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \qquad \underline{a}^T = [a_1 \ a_2 \ a_3]$$

- Mátrixszorzás? Most már működik!

$$\underline{a}^T \underline{b} = [a_1 \ a_2 \ a_3] \circledast \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \rightarrow [a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3]$$

Vektorok skaláris szorzata: $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ ← skalár

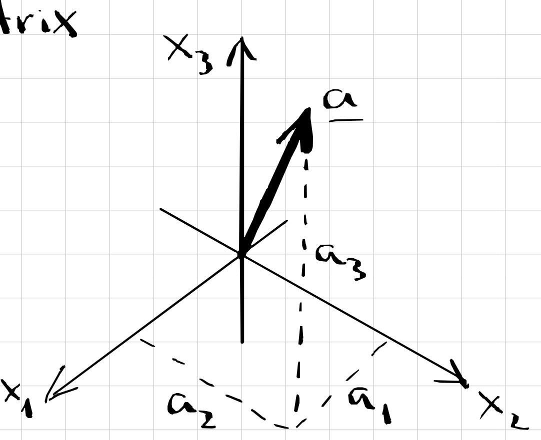
$\underline{a}^T \underline{b} = [\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle]$ ← 1×1-es mátrix

Vektor hossza:

$a \equiv \|\underline{a}\| \equiv \sqrt{\langle \underline{a}, \underline{a} \rangle}$

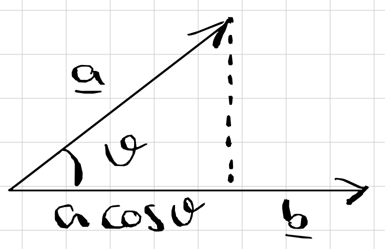
$a^2 = \langle \underline{a}, \underline{a} \rangle = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

(3D Pitagorasz)

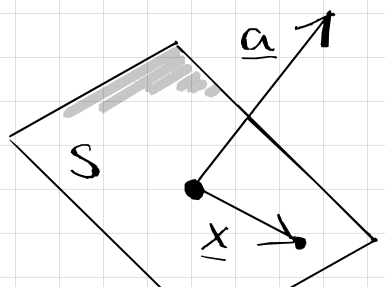


Koszinusz tétel:

$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = ab \cos \vartheta$

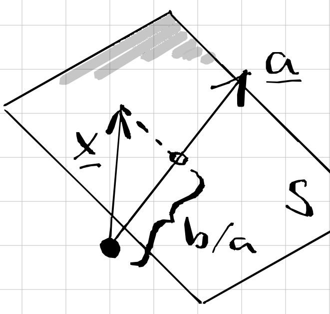


Sík egyenlete:



- $\underline{a}^T \underline{x} = [0]$, $\langle \underline{a}, \underline{x} \rangle = 0$

  $\underline{x}$: origón átmenő, $\underline{a}$-ra merőleges síkon lévő vektorok



- $\underline{a}^T \underline{x} = [b]$, $\langle \underline{a}, \underline{x} \rangle = b$

  $\underline{a} \parallel \underline{x}$ → $ax = b$ → $x = b/a$

Egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{array}{c} \underline{a}_1^T \rightarrow \\ \underline{a}_2^T \rightarrow \\ \underline{a}_3^T \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \langle \underline{a}_1, \underline{x} \rangle = b_1 \\ \langle \underline{a}_2, \underline{x} \rangle = b_2 \\ \langle \underline{a}_3, \underline{x} \rangle = b_3 \end{array}$$

- A megoldáshalmaz a három sík metszete

  0. A kibővített együtthatómátrixban a csupa 0 sorok elhagyhatók
  - Nem szűkítják meg a megoldáshalmazt

  1. Vannak párhuzamos síkok
  - Nem metszik egymást, tehát nincs megoldás!
  - Ilyenkor a Gauss-elimináció során önellentmondó sor adódik

  $$\left[\begin{array}{ccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right], \quad b \neq 0$$

  2. Nincsenek párhuzamos síkok

  2a. Mindhárom sík egybeesik
  - A megoldáshalmaz éppen ez a sík
  → 2 paraméter

  2b. Két sík egybeesik, a harmadik szöget zár be velük
  - A megoldáshalmaz egy egyenes
  → 1 paraméter

  2c. Nincsenek egybeeső és párhuzamos síkok
  - A megoldáshalmaz egy pont
  → Egyértelmű megoldás, nem kell paraméterezni