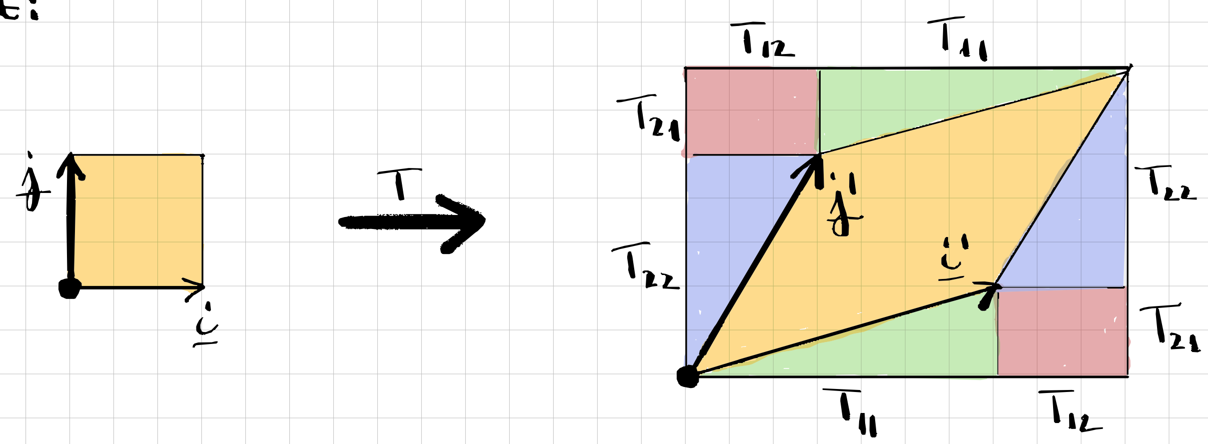
Determináns és felszín $\mathbb{R}^2$-ben

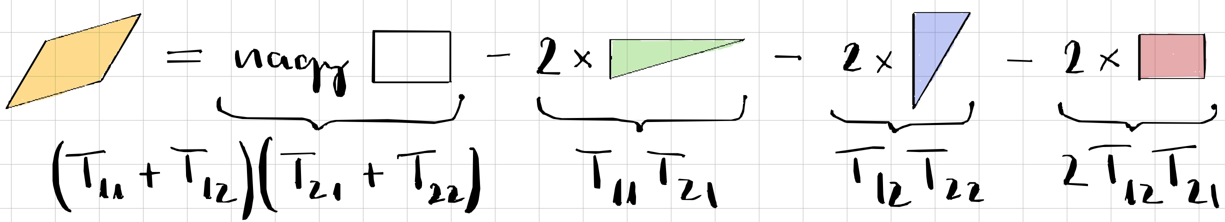
$\mathbb{R}^2$-ben a standard $B=\{\underline{i},\underline{j}\}$ bázist választjuk.

A $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció az $\underline{i}$ és $\underline{j}$ által meghatározott négyzetet az $\underline{i}'=T(\underline{i})$ és $\underline{j}'=T(\underline{j})$ transzformált bázisvektorok által meghatározott paralelogrammává deformálja.

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \qquad \underline{i}' = \underline{\underline{T}}\,\underline{i} = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \end{bmatrix} \qquad \underline{j}' = \underline{\underline{T}}\,\underline{j} = \begin{bmatrix} T_{12} \\ T_{22} \end{bmatrix}$$

1. eset:

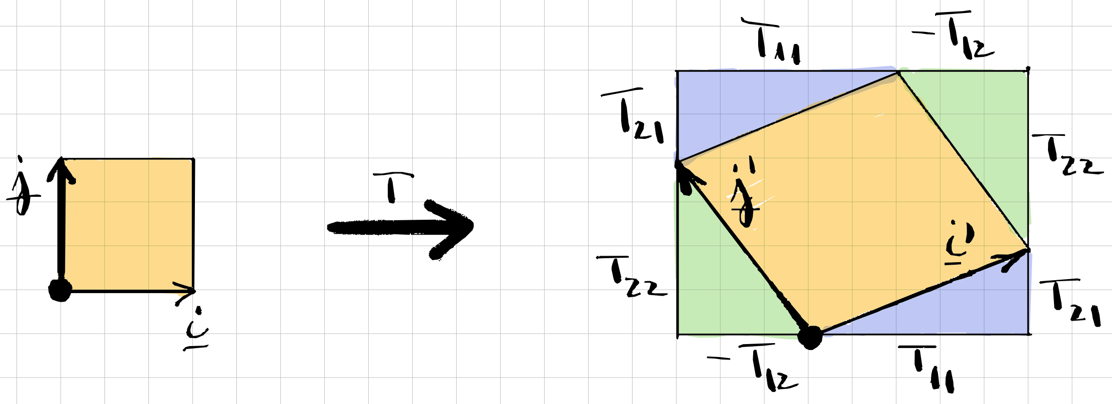


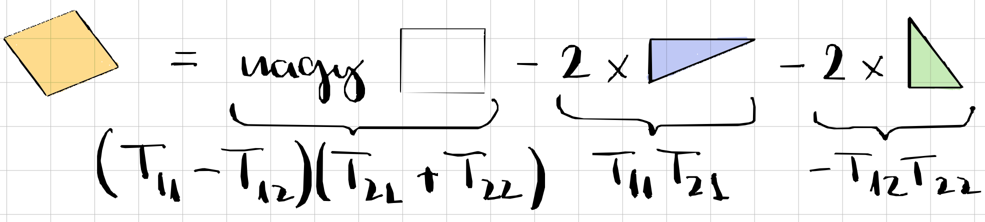


$$T_{11}T_{21} + T_{11}T_{22} + T_{12}T_{21} + T_{12}T_{22} = T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = \det \underline{\underline{T}}$$

$$-T_{11}T_{21} \qquad -2T_{12}T_{21} \quad -T_{12}T_{22}$$

2. eset:





$$T_{11}T_{21} + T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} - T_{12}T_{22} = T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = \det \underline{\underline{T}}$$

$$-T_{11}T_{21} \qquad +T_{12}T_{22}$$

Vigyázat! Előjeles felszínről van szó! Ha $T':\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ olyan, hogy

$$T'(\underline{i}) = \underline{j}' \quad \text{és} \quad T'(\underline{j}) = \underline{i}',$$

$T'(\underline{i})$ és $T'(\underline{j})$ ugyanazt a paralelogrammát határozzák meg, viszont

$$\det \underline{\underline{T}}' = -\det \underline{\underline{T}}.$$

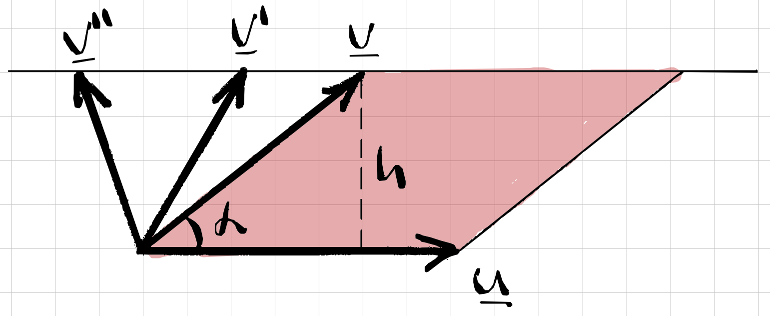
Vektoriális szorzás

Az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok $\underline{u} \times \underline{v}$ vektoriális szorzata

a) merőleges $\underline{u}$-ra és $\underline{v}$-re,

b) $\|\underline{u}\|\|\underline{v}\| \sin\alpha$ hosszú (α az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ által bezárt szög),

c) $\underline{u}$-val és $\underline{v}$-vel jobbsodrású rendszert alkot



$$h = \|\underline{v}\| \sin\alpha$$

$$A = \|\underline{u}\|\, h = \|\underline{u}\|\|\underline{v}\| \sin\alpha$$

$$= \|\underline{u} \times \underline{v}\| = \|\underline{u} \times \underline{v}'\| = \|\underline{u} \times \underline{v}''\| \qquad \text{Előjel!}$$

$\|\underline{u} \times \underline{v}\|$ mikor nulla?

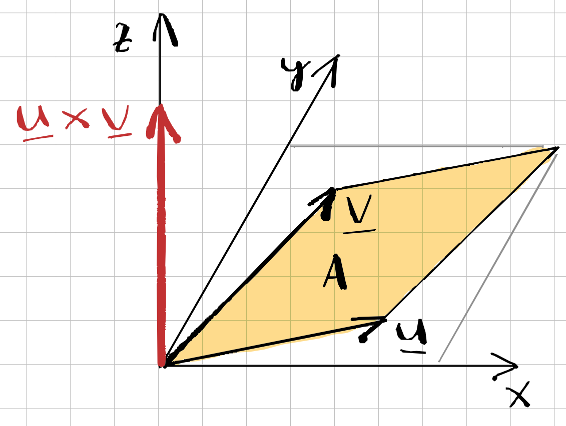
1) Ha $\|\underline{u}\| = 0$ vagy $\|\underline{v}\| = 0$ (vagy mindkettő)

2) Ha $\underline{u}$ és $\underline{v}$ párhuzamosak

Megjegyzés. Csak a nullvektor hossza nulla, tehát $\|\underline{u}\| = 0$ akkor és csak akkor, ha $\underline{u} = \underline{0}$

A vektoriális szorzat komponensei (szemléltetés)

1. eset: legyen $\underline{u}$ és $\underline{v}$ az xy-síkban

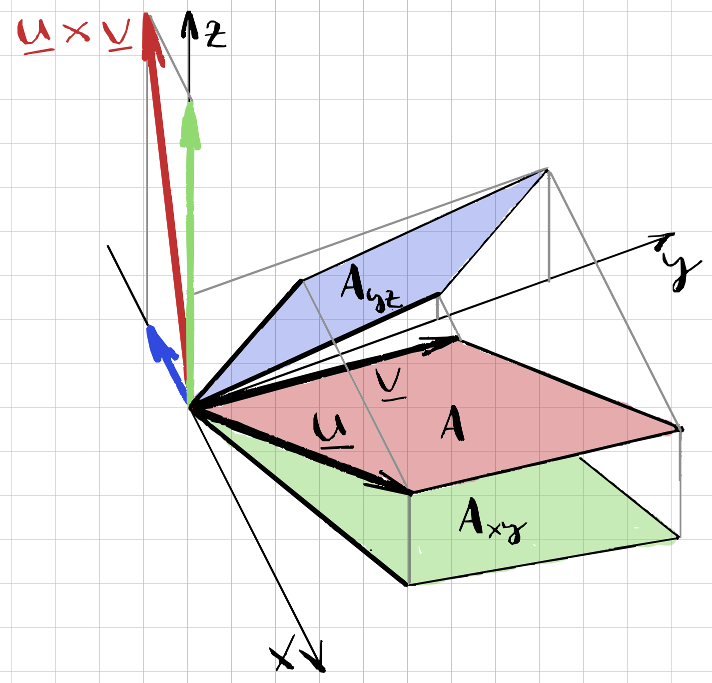


$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u} \times \underline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A \end{bmatrix}$$

$$A = \det \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} = u_x v_y - v_x u_y$$

2. eset: forgatunk egy kicsit az y tengely körül és nézzük az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ által meghatározott A paralelogramma xy-síkra vett A_{xy} vetületét, illetve yz-síkra vett A_{yz} vetületét. Ezek előjeles felszíne megegyezik $\underline{u} \times \underline{v}$-nek a z-, illetve x-koordinátájával.



$$\underline{u} \times \underline{v} = \begin{bmatrix} A_{yz} \\ 0 \\ A_{xy} \end{bmatrix}$$

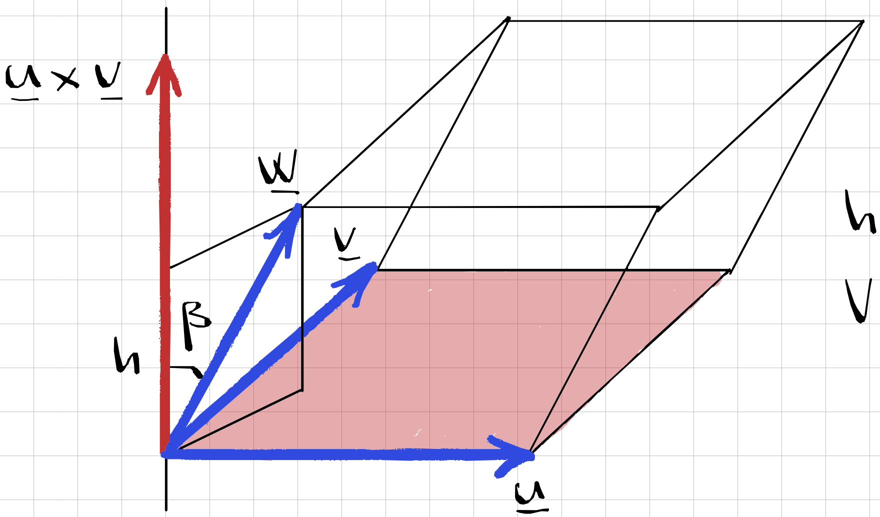
$$A_{xy} = \det \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} = u_x v_y - v_x u_y$$

$$A_{yz} = \det \begin{bmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{bmatrix} = u_y v_z - v_y u_z$$

Hasonlóan, vetületekkel belátható az is, hogy $\underline{u} \times \underline{v}$-nek az y-koordinátája

$$-\det \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_z & v_z \end{bmatrix} = u_z v_x - u_x v_z .$$

$\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorok vegyesszorzata
= a kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata



$$h = \|\underline{w}\| \cos\beta$$

$$V = A \cdot h = \|\underline{u} \times \underline{v}\| \, \|\underline{w}\| \cos\beta$$

$$= (\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w}$$

- A három vektor közül egyik sem kitüntetett, ezért sejthető/elvárt, hogy

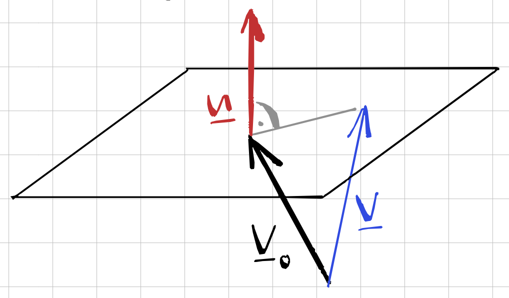
$$V = (\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w} = (\underline{v} \times \underline{w}) \cdot \underline{u} = (\underline{w} \times \underline{u}) \cdot \underline{v}$$

Vegyesszorzat kifejezése **determináns** segítségével:

Sík egyenlete. Egy sík egyértelmű megadásához kell

(1) egy $\underline{n}$ normálvektor,

(2) egy pont a síkon, amit egy $\underline{v}_0$ vektor ad meg



A síkon olyan $\underline{v}$ vektorok által megadott pontok vannak, amelyekre

$$\langle \underline{n}, \underline{v} - \underline{v}_0 \rangle = 0. \qquad (*)$$

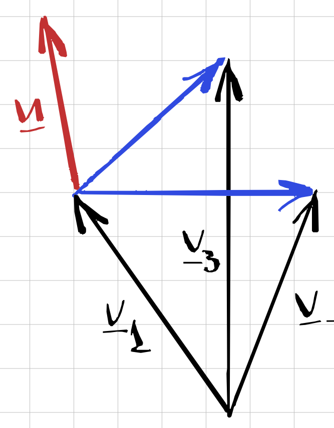
Legyen az $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ bázisban $\underline{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$, $\underline{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $\underline{v}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$.

Ekkor a $(*)$ egyenlet az ismert alakra hozható:

$$\langle \underline{n}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{n}, \underline{v}_0 \rangle,$$

$$n_x x + n_y y + n_z z = n_x x_0 + n_y y_0 + n_z z_0.$$

Három pont által kifeszített sík egyenlete:



$$\underline{n} = (\underline{v}_2 - \underline{v}_1) \times (\underline{v}_3 - \underline{v}_1)$$

$$\langle \underline{n}, \underline{v} - \underline{v}_1 \rangle = 0$$

$$\langle \underline{n}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{n}, \underline{v}_1 \rangle$$

$\underline{v}_0$ szerepét most $\underline{v}_1$ tölti be.

Példa:

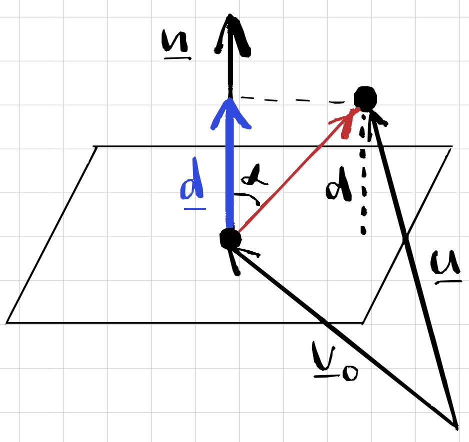
$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_2 - \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{v}_3 - \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{n} = \begin{vmatrix} \underline{i} & 3 & -1 \\ \underline{j} & 3 & 3 \\ \underline{k} & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \\ 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \langle \underline{n}, \underline{v}_1 \rangle = 3$$

$$3x - 3y + 4z = 6$$

Pont távolsága síktól



Sík egyenlete: $\langle \underline{n}, \underline{v} - \underline{v}_0 \rangle = 0$

$$\underline{d} = \frac{\underline{n} \langle \underline{n}, \underline{u} - \underline{v}_0 \rangle}{\|\underline{n}\|^2}$$

$$\|\underline{d}\|^2 = \frac{\langle \underline{n}, \underline{u} - \underline{v}_0 \rangle^2}{\|\underline{n}\|^2}$$

Példa: $2x - 4y + 5z = 1$, $\underline{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

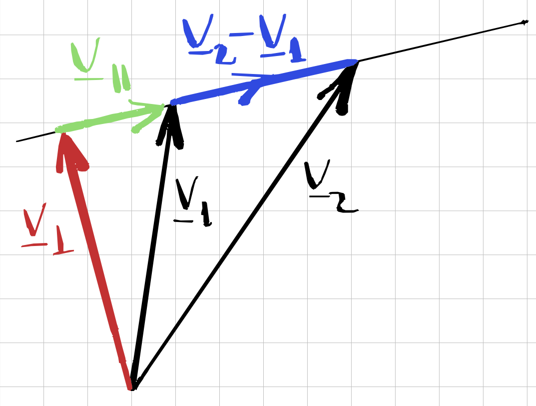
$$\underline{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \|\underline{n}\|^2 = 4 + 16 + 25 = 45$$

$$2(x-0) - 4(y-1) + 5(z-1) = 0 \qquad \underline{v}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u} - \underline{v}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \langle \underline{n}, \underline{u} - \underline{v}_0 \rangle = 2 - 4 + 10 = 8$$

$$d = 8/3\sqrt{5}$$

Két pont által kifeszített egyenes távolsága az origótól



$$\underline{v}_1 + t(\underline{v}_2 - \underline{v}_1)$$

$$\underline{v}_\perp = \underline{v}_1 + t^*(\underline{v}_2 - \underline{v}_1)$$

$$d^2 = \|\underline{v}_\perp\|^2 = \|\underline{v}_1\|^2 - \|\underline{v}_\parallel\|^2$$

$$\underline{v}_\parallel = (\underline{v}_2 - \underline{v}_1)\frac{\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 - \underline{v}_1\rangle}{\|\underline{v}_2 - \underline{v}_1\|^2}$$

$$\|\underline{v}_\parallel\|^2 = \frac{\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 - \underline{v}_1\rangle^2}{\|\underline{v}_2 - \underline{v}_1\|^4}\|\underline{v}_2 - \underline{v}_1\|^2 = \frac{\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 - \underline{v}_1\rangle^2}{\|\underline{v}_2 - \underline{v}_1\|^2}$$

$$d^2 = \|\underline{v}_1\|^2 - \frac{\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 - \underline{v}_1\rangle^2}{\|\underline{v}_2 - \underline{v}_1\|^2}$$

Példa: $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\|\underline{v}_1\|^2 = 9 + 4 + 1 = 14 \qquad \underline{v}_2 - \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 - \underline{v}_1\rangle = -15 - 8 + 2 = -21 \rightarrow 21^2 = 7\cdot 7\cdot 9$

$\|\underline{v}_2 - \underline{v}_1\|^2 = 25 + 16 + 4 = 45 = 5\cdot 9$

$$d^2 = 14 - \frac{7\cdot 7\cdot 9}{5\cdot 9} = 7(2 - 7/5) = 21/5 \approx 4$$

$d \approx 2$

Egyenesek metszéspontja

Két egyenes: $\underline{v}_1 + s\underline{t}_1$, $\quad \underline{v}_2 + s\underline{t}_2 \qquad \underline{t}_1, \underline{t}_2$: irányvektorok

Ha $\underline{v}$ egy közös pont,

$$\underline{v} = \underline{v}_1 + s\underline{t}_1 = \underline{v}_2 + s'\underline{t}_2$$

$$\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = -s\underline{t}_1 + s'\underline{t}_2$$

Utóbbi azt jelenti, hogy $\underline{v}_1 - \underline{v}_2$ rajta van a $\underline{t}_1$ és $\underline{t}_2$ által kifeszített síkon, tehát a síkra merőleges komponense nulla. Ezért

$$(\underline{t}_1 \times \underline{t}_2)\cdot(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = 0.$$

Ez $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ megválasztásától független:

$$(\underline{t}_1 \times \underline{t}_2)\cdot(\underline{v}_1 + \alpha\underline{t}_1 - \underline{v}_2 - \beta\underline{t}_2) =$$

$$= (\underline{t}_1 \times \underline{t}_2)\cdot(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) + (\underline{t}_1 \times \underline{t}_2)\cdot\underbrace{(\alpha\underline{t}_1 - \beta\underline{t}_2)}_{\perp\, \underline{t}_1 \times \underline{t}_2}$$

$$= (\underline{t}_1 \times \underline{t}_2)\cdot(\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$$

Ha a feltétel teljesül,

$$\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = -s\underline{t}_1 + s'\underline{t}_2 \quad / \langle \cdot, \underline{t}_1\rangle$$

$$\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = -s\underline{t}_1 + s'\underline{t}_2 \quad / \langle \cdot, \underline{t}_2\rangle$$

$$\langle \underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{t}_1\rangle = -s\|\underline{t}_1\|^2 + s'\langle \underline{t}_2, \underline{t}_1\rangle$$

$$\langle \underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{t}_2\rangle = -s\langle \underline{t}_1, \underline{t}_2\rangle + s'\|\underline{t}_2\|^2$$

$$\begin{bmatrix} -\|\underline{t}_1\|^2 & \langle \underline{t}_2, \underline{t}_1\rangle \\ -\langle \underline{t}_1, \underline{t}_2\rangle & \|\underline{t}_2\|^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s \\ s' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{t}_1\rangle \\ \langle \underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{t}_2\rangle \end{bmatrix}$$

A 2×2-es mátrix invertálható, ha $\underline{t}_1$ és $\underline{t}_2$ nem párhuzamosak