## Másodrendű Differenciálegyenletek

A speciális egyenlet, amelynek a megoldását keressük:

$$py'' + qy' + ry = f(x),$$

- $y(x)$, $f(x)$ valós függvények, $f$ ismert, $y$ ismeretlen

Az egyenlet
- másodrendű: szerepel benne $y''$
- állandó együtthatójú: $y$ és deriváltjainak a $p, q, r$ együtthatói (valós) konstansok (és nem pl. polinomok)
- lineáris: $\mathcal{L}(y) = f(x)$ alakú, ahol

  $$\mathcal{L} \equiv p\frac{d^2}{dx^2} + q\frac{d}{dx} + r.$$

  egy lineáris operátor, vagyis tudja azt, hogy

  $$\mathcal{L}(a_1y_1 + a_2y_2) = a_1\mathcal{L}(y_1) + a_2\mathcal{L}(y_2), \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$
- inhomogén: feltehetőleg $f \neq 0$, különben homogén.

### Áttérés a komplex számok halmazára

A komplex számok a valós számoknál bonyolultabbnak tűnnek, de gyakran érdemesebb $\mathbb{C}$-ben dolgozni, majd visszatérni $\mathbb{R}$-be. Most is ez lesz.

Első lépésként $y$-t $\underline{\mathbb{R}\text{-ből } \mathbb{C}\text{-be}}$ képező függvényként kezeljük, és a differenciálegyenletet is ilyen függvényekre mondjuk ki.

Ehhez meg kell adni, hogyan deriváljunk egy $F: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvényt. A legkézenfekvőbb, hogy a valós és a képzetes részt, amik valós függvények, külön-külön. Vagyis ha

$$F(x) = F_{Re}(x) + iF_{Im}(x), \qquad F_{Re}, F_{Im}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

akkor a derivált

$$F'(x) \equiv F'_{Re}(x) + iF'_{Im}(x).$$

Ezzel olyan kedvező tulajdonságokat tartunk meg, mint a linearitás, vagy a szorzási szabály.

Utóbbi könnyen belátható:

$$\begin{aligned}
(FG)' &= \left[(F_{Re} + iF_{Im})(G_{Re} + iG_{Im})\right]' \\
&= \Big[\underbrace{(F_{Re}G_{Re} - F_{Im}G_{Im})}_{\mathrm{Re}\,FG} + i\underbrace{(F_{Re}G_{Im} + F_{Im}G_{Re})}_{\mathrm{Im}\,FG}\Big]' \\
&\overset{\text{Derivált fenti def.}}{=} (F_{Re}G_{Re} - F_{Im}G_{Im})' + i(F_{Re}G_{Im} + F_{Im}G_{Re})' \\
&\overset{\text{Valós derivált szorzási szab.}}{=} (F'_{Re}G_{Re} - F'_{Im}G_{Im}) + i(F'_{Re}G_{Im} + F'_{Im}G_{Re}) \\
&\quad + (F_{Re}G'_{Re} - F_{Im}G'_{Im}) + i(F_{Re}G'_{Im} + F_{Im}G'_{Re}) \\
&= (F'_{Re} + iF'_{Im})(G_{Re} + iG_{Im}) \\
&\quad + (F_{Re} + iF_{Im})(G'_{Re} + iG'_{Im}) \\
&\overset{\text{Derivált fenti def.}}{=} F'G + FG'.
\end{aligned}$$

Látszik az is, hogy az „új" deriválás a valós függvények megszokott deriválásának a kiterjesztése: valós értékű $F$-re a két derivált azonos.

Ezért az így „komplexifikált" egyenlet <u>valós</u> megoldásai kielégítik az eredeti, <u>valós</u> egyenletet.

Keressük tehát a <u>komplex</u> egyenlet megoldásait, de ehhez szükségünk lesz néhány összefüggésre, amiket gyakorlaton nem tanultunk.

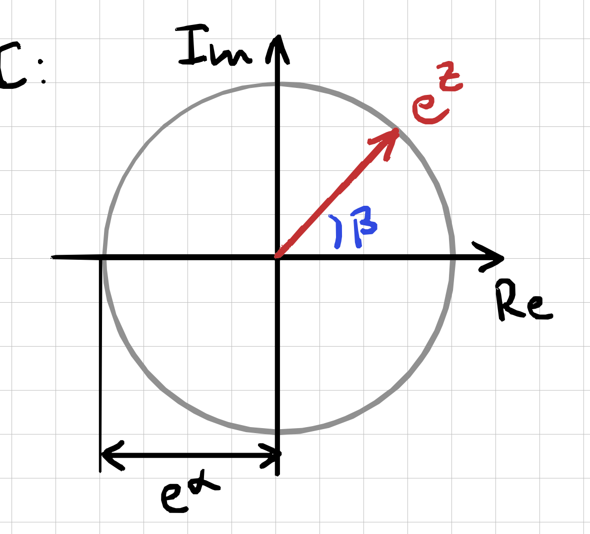
### Komplex azonosságok

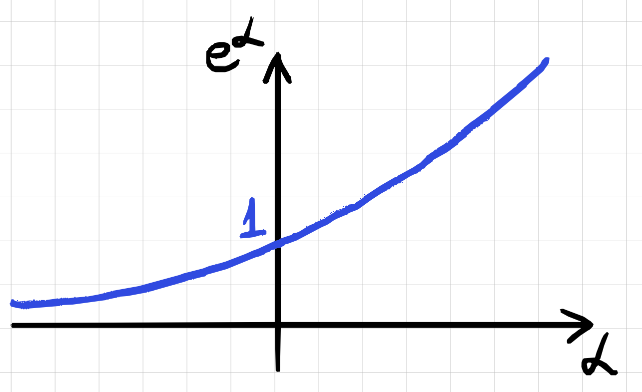
Euler-formula: $\quad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$

Komplex exponenciális függvény: $\quad z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C},$

$$e^z = e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}e^{i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta).$$

$e^z$ soha nem nulla: $\mathbb{C}$-ben az $e^{\alpha}$ sugarú körön van, és $e^{\alpha} > 0$ minden $\alpha \in \mathbb{R}$-re.




Konjugálással kapcsolatos azonosságok:

$$\begin{aligned}
\overline{e^{i\varphi}} &= \cos\varphi - i\sin\varphi \\
&= \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = e^{-i\varphi}
\end{aligned}$$

$$\overline{e^z} = \overline{e^{\alpha}e^{i\beta}} = \overline{e^{\alpha}}\,\overline{e^{i\beta}} = e^{\alpha}e^{-i\beta} = e^{\alpha - i\beta} = e^{\bar{z}}$$

cos-os és sin-os tagok kifejezése:

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right), \qquad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)$$

Komplex exponenciális függvény deriváltja: $\quad z = \alpha + i\beta,$

$$e^{zx} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = \underbrace{e^{\alpha x}\cos\beta x}_{\mathrm{Re}} + i\underbrace{e^{\alpha x}\sin\beta x}_{\mathrm{Im}}$$

$$\begin{aligned}
(e^{zx})' &= (e^{\alpha x}\cos\beta x)' + i(e^{\alpha x}\sin\beta x)' \\
&= (\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x) \\
&\quad + i(\alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x) \\
&= (\alpha + i\beta)e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = ze^{zx}.
\end{aligned}$$

Alakra ez ugyanolyan, mintha $x$ együtthatója valós lenne, ezért kényelmes így számolni.

## Homogén egyenlet általános megoldása

A komplexifikált $py'' + qy' + ry = f(x)$ egyenlet most már a komplex értelemben lineáris:

$$\mathcal{L}(y) = f(x), \quad \mathcal{L} \equiv p\frac{d^2}{dx^2} + q\frac{d}{dx} + r,$$

$$\mathcal{L}(w_1 y_1 + w_2 y_2) = w_1 \mathcal{L}(y_1) + w_2 \mathcal{L}(y_2), \quad w_1, w_2 \in \mathbb{C}.$$

Az egyenlet mindkét változatának az általános megoldásai így állnak elő:

$$y_{iá} = y_{há} + y_{ip}, \quad \text{ahol}$$

$y_{há}$ a homogén egyenlet általános megoldása, ezt keressük most,

$y_{ip}$ az inhomogén egyenlet egy tetszőleges partikuláris megoldása, ezzel foglalkozunk a következő lépésben.

A homogén egyenlet mindkét esetben:

$$py'' + qy' + ry = 0.$$

Ismert tétel, hogy a megoldáshalmaz két lineárisan független megoldás által kifeszített altér. Ebben van egy szabadság: bármely két ilyen megoldás jó!

A komplexifikált homogén egyenlet lineárisan független megoldásait $e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ alakban keressük. Helyettesítsük ezt a próbafüggvényt az egyenletbe:

$$\left.\begin{aligned} y &= e^{\lambda x} \\ y' &= \lambda e^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda^2 e^{\lambda x} \end{aligned}\right\} \rightarrow \; e^{\lambda x}(p\lambda^2 + q\lambda + r) = 0$$

Osztva a nemnulla $e^{\lambda x}$-nel, kapjuk a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletét:

$$p\lambda^2 + q\lambda + r = 0.$$

A bal oldal egy valós együtthatós, komplex változós, másodfokú polinom, amelynek mindig két gyöke van, de azok nem feltétlenül valósak.
$\Delta \equiv q^2 - 4pr$ előjele alapján három eset lehetséges:

1) $\Delta > 0$, és két különböző valós gyök van:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2p}\left(-q \pm \sqrt{\Delta}\right).$$

A lin. ftn. megoldások $e^{\lambda_1 x}$ és $e^{\lambda_2 x}$, így az általános megoldás

$$y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}, \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

Mivel $e^{\lambda_1 x}$ és $e^{\lambda_2 x}$ valósak, $A$-t és $B$-t valósnak választva $y$ is valós, ezért az eredeti homogén egyenlet általános megoldása:

$$\boxed{y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}, \quad A, B \in \mathbb{R}}$$

2) $\Delta = 0$, és két azonos valós gyök van:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{q}{2p}.$$

Ekkor $e^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_2 x}$, ezért kell még egy megoldás. $xe^{\lambda_1 x}$ megfelel, mivel nem $e^{\lambda_1 x}$ konstansszorosa, és valóban megoldás:

$$(xe^{\lambda_1 x})' = \lambda_1 x e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_1 x}$$
$$(xe^{\lambda_1 x})'' = \lambda_1^2 x e^{\lambda_1 x} + 2\lambda_1 e^{\lambda_1 x}$$

$$p(xe^{\lambda_1 x})'' + q(xe^{\lambda_1 x})' + r(xe^{\lambda_1 x})$$
$$= \underbrace{(p\lambda_1^2 + q\lambda_1 + r)}_{1} xe^{\lambda_1 x} + \underbrace{(q + 2p\lambda_1)}_{2} e^{\lambda_1 x}$$

1 $= 0$, mivel $\lambda_1$ gyök
- Ez az előző esetben is nulla.

2 $= 0$, mivel $\lambda_1 = -q/2p$
- Ez az előző esetben nem nulla, tehát $xe^{\lambda_1 x}$ csak most megoldás.

Mivel $e^{\lambda_1 x}$ és $xe^{\lambda_1 x}$ valósak, az eredeti homogén egyenlet általános megoldása:

$$\boxed{y = (A + Bx)e^{\lambda_0 x}, \quad A, B \in \mathbb{R}}$$

3) $\Delta < 0$, és két különböző komplex gyök van, amelyek egymás konjugáltjai:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2p}\left(-q \pm i\sqrt{-\Delta}\right).$$

Az általános megoldás:

$$y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}, \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

Mivel $e^{\lambda_1 x}$ és $e^{\lambda_2 x}$ komplexek, nem kapunk valós megoldásokat, ha $A$-t és $B$-t valósnak választjuk, de ha $A$ és $B$ egymás konjugáltjai (pl. $B = \bar{A}$), akkor igen: $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ miatt

$$y = Ae^{\lambda_1 x} + \bar{A}e^{\bar{\lambda}_1 x} = Ae^{\lambda_1 x} + \bar{A}\,\overline{e^{\lambda_1 x}}$$
$$= Ae^{\lambda_1 x} + \overline{Ae^{\lambda_1 x}} = 2\,\mathrm{Re}\{Ae^{\lambda_1 x}\}$$

már valós. Legyen

$$\lambda_1 \equiv \alpha + i\beta, \quad \alpha \equiv -\frac{q}{2p}, \quad \beta \equiv \frac{\sqrt{-\Delta}}{2p}.$$

Ekkor $e^{\lambda_1 x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$ és (H.F.!)

$$2\,\mathrm{Re}\{Ae^{\lambda_1 x}\} = e^{\alpha x}(2\,\mathrm{Re}A\cos\beta x - 2\,\mathrm{Im}A\sin\beta x).$$

Mivel $\mathrm{Re}A$ és $\mathrm{Im}A$ egymástól függetlenek, a

$$C \equiv 2\,\mathrm{Re}A \quad \text{és} \quad D \equiv -2\,\mathrm{Im}A$$

valós konstansok is függetlenek, így az eredeti homogén egyenlet általános megoldása:

$$\boxed{y = Ce^{\alpha x}\cos\beta x + De^{\alpha x}\sin\beta x, \quad C, D \in \mathbb{R}}$$

## Inhomogén egyenlet partikuláris megoldása

Az inhomogén egyenlet:

$$p y'' + q y' + r y = f(x).$$

Legelőször nézzük, mi a megoldás, amikor

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad f(x) = x^n e^{zx}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Kísérletezzünk az alábbi próbafüggvénnyel:

$$y(x) = Q_n(x) e^{zx},$$

$$Q_n(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0.$$

A $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ együtthatók az ismeretlenek.
Behelyettesítünk az inhomogén egyenletbe:

$$y'(x) = z Q_n(x) e^{zx} + Q_n'(x) e^{zx}$$
$$y''(x) = z^2 Q_n(x) e^{zx} + 2z Q_n'(x) e^{zx} + Q_n''(x) e^{zx}$$

$$\begin{aligned} x^n e^{zx} = p y'' + q y' + r y = {} & (p z^2 + q z + r) Q_n(x) e^{zx} \\ & + (2pz + q) Q_n'(x) e^{zx} \\ & + p Q_n''(x) e^{zx}. \end{aligned}$$

$e^{zx}$-nel való osztás után:

$$x^n = \underbrace{(p z^2 + q z + r)}_{= a_1} Q_n(x) + \underbrace{(2pz + q)}_{= a_2} Q_n'(x) + p Q_n''(x)$$

A deriválás eggyel csökkenti a polinom fokszámát, ezért, ha $a_1 = 0$, a jobb oldalon nem lesz $x^n$-el arányos tag, és így megoldás sem lesz.
Az is látszik, hogy $a_1$ csak akkor nulla, ha $z$ gyöke a karakterisztikus egyenletnek.
Ha $z$ <u>egyszeres gyök</u>, $a_2 \neq 0$, és ekkor $Q_n(x)$ helyett az $x Q_n(x)$ polinommal érdemes próbálkozni. Ez az ún. egyszeres rezonancia esete.
Ha $z$ <u>kétszeres gyök</u>, $a_1 = a_2 = 0$, és ekkor $x^2 Q_n(x)$ lesz a célravezető polinom, mert így lesz $x^n$-el arányos tag két deriválás után. Ez az ún. kétszeres rezonancia esete.
Felmerülhet a kérdés, hogy $x Q_n(x)$, illetve $x^2 Q_n(x)$ helyett miért nem használunk tetszőleges $n+1$-edfokú, illetve $n+2$-edfokú polinomot.
Egyszeres rezonancia esetén a polinom (ismeretlen) szabadtagja a deriválások miatt kiesik, ezért tetszőleges lehet. Kétszeres rezonancia esetén az $x$-szel arányos tag is kiesik, ezért az ő együtthatója is tetszőleges lehet.
Mivel most nem az összes megoldást keressük, hanem megelégszünk <u>egy</u> megoldással, a kieső tagokat 0-nak választjuk.
– Az összes megoldást majd úgy kapjuk, hogy ezt a partikuláris megoldást hozzáadjuk a homogén egyenlet megoldásaihoz.

Nézzük a $Q_n$ együtthatóira kapott egyenletrendszert.

### 1. Nincs rezonancia

$$x^n = a_1 Q_n(x) + a_2 Q_n'(x) + p Q_n''(x)$$

$$\begin{aligned} 1 &= a_1 b_n \\ 0 &= a_1 b_{n-1} + a_2 n b_n \\ 0 &= a_1 b_{n-2} + a_2 (n-1) b_{n-1} + p n (n-1) b_n \\ &\ \vdots \\ 0 &= a_1 b_0 + a_2 b_1 + p\, 2 b_2 \end{aligned}$$

$a_0$-lal való osztás és átrendezés után:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{a_1} \\ b_{n-1} &= -\frac{1}{a_1} a_2 n b_n \\ b_{n-2} &= -\frac{1}{a_1} \left[ a_2 (n-1) b_{n-1} + p n (n-1) b_n \right] \\ &\ \vdots \\ b_0 &= -\frac{1}{a_1} \left[ a_2 b_1 + p\, 2 b_2 \right] \end{aligned}$$

### 2. Van rezonancia

$$x^n = a_2 [x Q_n(x)]' + p [x Q_n(x)]'' \qquad \text{(egyszeres rez.)}$$

$$\begin{aligned} 1 &= a_2 (n+1) b_n \\ 0 &= a_2 n b_{n-1} + p (n+1) n b_n \\ &\ \vdots \\ 0 &= a_2 b_0 + p\, 2 b_1 \end{aligned}$$

$$x^n = p [x^2 Q_n(x)]'' \qquad \text{(kétszeres rez.)}$$

$$\begin{aligned} 1 &= p (n+2)(n+1) b_n \\ 0 &= p (n+1) n b_{n-1} \\ &\ \vdots \\ 0 &= p\, 2 b_0 \end{aligned}$$

Mindhárom egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, tehát $Q_n(x)$ egyértelműen meghatározható.

<u>Megjegyzés</u>. Mindhárom esetben az egyenletrendszeretben csak $a_1$ és $a_2$ lehet komplex, és ha $z$ valós, $a_1$ és $a_2$ is valós. Ekkor $Q_n$ együtthatói is valósak.

Most, hogy (elvileg) elő tudjuk állítani az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $f(x) = x^n e^{zx}$ esetén, ezt megtehetjük akkor is, ha

$$f(x) = P_n(x) e^{zx} = p_n x^n e^{zx} + \dots + p_1 x e^{zx} + p_0 e^{zx},$$

ahol $P_n$ n-edfokú komplex együtthatós polinom.
Ehhez használjuk az egyenlet linearitását: ha

$py'' + qy' + ry = f_1(x)$ megoldása $y_1(x)$ és

$py'' + qy' + ry = f_2(x)$ megoldása $y_2(x)$,

$py'' + qy' + ry = w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x)$, $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$

megoldása $y = w_1 y_1(x) + w_2 y_2(x)$.

Ez véges sok tagra is általánosítható.

$f(x) = P_n(x) e^{zx}$-re tehát a megoldás alakja

$$\begin{aligned} y(x) &= R_n(x) e^{zx} && \text{(nincs rez.)} \\ y(x) &= x R_n(x) e^{zx} && \text{(1x rez.)} \\ y(x) &= x^2 R_n(x) e^{zx} && \text{(2x rez.)} \end{aligned}$$

ahol $R_n(x)$ n-edfokú komplex együtthatós polinom:

$$R_n(x) = p_n Q_n(x) + \dots + p_1 Q_1(x) + p_0 Q_0.$$

Ld. előző oldal

Megjegyzés. Ha $P_n(x)$ valós együtthatós és $z$ valós, $R_n$ együtthatói is valósak.

Érdekesek lesznek azok az esetek, amikor $f(x)$ két komplex függvény összege, amelyek egymás konjugáltjai:

$$f(x) = g(x) + \bar{g}(x) \equiv g(x) + \text{c.c.}$$

– Ez egy gyakori rövidítés, amely azt jelenti, hogy egy kifejezéshez a komplex konjugáltját kell hozzáadni.

Kérdés, hogy ha $py_1'' + qy_1' + ry_1 = g(x)$, mi lehet

$$py'' + qy' + ry = \bar{g}(x)$$

megoldása? Sejthető, hogy $\bar{y}_1$.
A bizonyításhoz előbb be kell látni, hogy a konjugálás és a deriválás felcserélhető:

$$\begin{aligned} (\bar{F})' &= [F_{Re} - iF_{Im}]' = [F_{Re} + i(-F_{Im})]' \\ &= F_{Re}' + i(-F_{Im})' = F_{Re}' + i(-F_{Im}') \\ &= F_{Re}' - iF_{Im}' = \overline{F_{Re}' + iF_{Im}'} = \overline{(F')}. \end{aligned}$$

Ezért, a $py_1'' + qy_1' + ry_1 = g(x)$ egyenletet konjugálva kapjuk, hogy

$$\bar{g}(x) = \overline{py_1'' + qy_1' + ry_1} = p\bar{y}_1'' + q\bar{y}_1' + r\bar{y}_1.$$

Tehát $\bar{y}$ valóban megoldás, és így

$$py'' + qy' + ry = g(x) + \text{c.c.}$$

megoldása $y = y_1 + \text{c.c.}$

Most már minden a rendelkezésünkre áll, hogy a feladatsorban lévő

$$py'' + qy' + ry = P_n(x) e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{és}$$

$$py'' + qy' + ry = P_n(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$$

eseteket tárgyalhassuk, amikor $P_n(x)$ valós együtthatós n-edfokú polinom.
Nézzük az első esetet. Az Euler-formula alapján

$$\cos \beta x = \frac{1}{2}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}), \quad \text{tehát}$$

$$\begin{aligned} py'' + qy' + ry &= \frac{1}{2} P_n(x) e^{\alpha x} e^{i\beta x} + \frac{1}{2} P_n(x) e^{\alpha x} e^{-i\beta x} \\ &= \frac{1}{2} P_n(x) e^{(\alpha + i\beta)x} + \text{c.c.} \end{aligned}$$

Ha nincs rezonancia,

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} R_n(x) e^{(\alpha + i\beta)x} + \text{c.c.} \\ &= \mathrm{Re}\{R_n(x) e^{(\alpha + i\beta)x}\} \\ &= \mathrm{Re}\{(\mathrm{Re}\, R_n(x) + i\, \mathrm{Im}\, R_n(x)) e^{\alpha} (\cos \beta x + i \sin \beta x)\} \\ &= \underline{\mathrm{Re}\{R_n(x)\}} e^{\alpha} \cos \beta x \, \underline{- \mathrm{Im}\{R_n(x)\}} e^{\alpha} \sin \beta x \end{aligned}$$

Valós együtthatós, egymástól független n-edfokú polinomok

Rezonancia esetén annak a típusától függően x-szel vagy $x^2$-tel kell szorozni.
Tehát visszakaptuk a megoldási „receptben” megadott alakot.
$P_n(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$ esetében hasonlóan kell eljárni, mivel

$$\sin \beta x = \frac{1}{2i}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = \frac{1}{2i} e^{i\beta x} + \text{c.c.}$$