

Tartalomjegyzék

1. Lineáris egyenletrendszerek	2
1.1. Feladatok: háromismeretlenes egyenletrendszerek	2
1.2. Feladatok: paraméteres egyenletrendszerek	4
1.3. Elméleti kérdések	5
2. Lineáris terek	5
2.1. Elméleti kérdések	5
3. Vektoriális szorzat	7
3.1. Feladatok	7
3.2. Elméleti kérdések	8
4. Mátrixok	10
4.1. Feladatok: determináns, inverz	10
4.2. Feladatok: inverz létezése paramétertől függően	13
4.3. Feladatok: sajátérték, sajátvektor, diagonalizálás	14
4.4. Elméleti kérdések	16
5. Lineáris transzformációk	17
5.1. Feladatok: forgatások, nyújtások, tükrözések mátrixai	17
5.2. Feladatok: vetítések mátrixai	19
5.3. Feladatok: transzformációk szorzata és felcserélhetősége	21
5.4. Elméleti kérdések	21
6. Koordinátageometria	22
6.1. Feladatok: paraméterrel megadott egyenesek	22
6.2. Feladatok: síkok egyenletei	25
6.3. Elméleti kérdések	28
7. Sorozatok határértéke	29
7.1. Feladatok: leggyorsabban növekvő tagból számolt határérték	29
7.2. Feladatok: határérték az exponenciálisban	32
7.3. Elméleti kérdések	35
8. Függvények határértéke, folytonosság	37
8.1. Feladatok: határérték kiszámolása	37
8.2. Feladatok: paramétertől függő folytonosság	37
8.3. Elméleti kérdések	42
9. Deriválás	43
9.1. Elméleti kérdések: L'Hospital szabály	43
10. Érintő egyenes, Taylor-polinom	44

1. Lineáris egyenletrendszerek

1.1. Feladatok: háromismeretlenes egyenletrendszerek

2019_03_06_zh1

(4 pont) Oldjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszert.

$$3x + 14z = -12$$

$$2x - y + 9z = -11$$

$$x - 2y + 2z = -4$$

2019_05_20_pzh1

(4 pont) Oldjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszert.

$$3x - 4y + 11z = -1$$

$$x - 3y + 2z = 3$$

$$-4x + 3y - 17z = 6$$

2022_03_24_zh1_A

(4 pont) Oldjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszert.

$$x - 3y + 2z = 5$$

$$3x - 8y + 7z = 10$$

$$-2x + y - 6z = 9$$

2022_03_24_zh1_B

(4 pont) Oldjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszert.

$$x + 2y - 3z = 5$$

$$3x + 7y - 8z = 10$$

$$2x + 6y - z = -9$$

2023_10_04_zh1_A

(4 pont) Oldjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszert.

$$2x + 5y + 2z = -4$$

$$3x + y + 4z = 1$$

$$x - 3y + 2z = 5$$

2023_10_04_zh1_B

(4 pont) Oldjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszert.

$$2x + 4y + 2z = 2$$

$$-3x + y + 5z = 1$$

$$x + 3y + 2z = 2$$

2023_12_11_pzh1

(5 pont) Oldjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszert.

$$3x - 8y = -7$$

$$2x - 3y + 7z = 0$$

$$x - 2y + 2z = -1$$

2024_03_22_zh1

(4 pont) Oldjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszert.

$$4x + 7y + 7z = 17$$

$$x + 3y - 2z = 3$$

$$3x + 7y = 11$$

2024_05_27_pzh1

(4 pont) Oldjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszert.

$$x - 3y - 4z = 2$$

$$5x + 2z = 4$$

$$4x + y + 3z = 3$$

2024_09_30_zh1_A

(4 pont) Oldjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszert.

$$4x - y + 6z = -3$$

$$2x + y + 5z = -3$$

$$x - 3y - 2z = 2$$

2024_09_30_zh1_B

(4 pont) Oldjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszert.

$$2x + 5y - z = -3$$

$$x - 2y + 3z = 2$$

$$4x + 6y + z = -3$$

2024_12_16_v

(5 pont) Oldjuk meg Gauss-eliminációval a

$$3x - 8y + 4z = 5$$

$$2x - y + 7z = 12$$

$$x - y + 3z = 5$$

lineáris egyenletrendszert.

2025_10_06_zh1_A

(4 pont) Oldjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszert.

$$2x - y + z = 3$$

$$x + 2y - z = -1$$

$$3x - y + 2z = 8$$

2025_10_06_zh1_B

(4 pont) Oldjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszert.

$$2x + y - z = 1$$

$$-x + 3y + 2z = 11$$

$$x + 4y - z = 6$$

2025_12_15_pzh1

(4 pont) Oldjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszert.

$$x + 4y - 2z = 13$$

$$3x + 2y + 5z = 8$$

$$2x - y + 6z = -2$$

2026_01_09_v

(5 pont) Gauss-elimináció alkalmazásával adjuk meg az alábbi egyenletrendszer összes megoldását.

$$\begin{aligned}2x + 7y - z &= 8 \\ x + 5y - 8z &= 7 \\ 3x + 8y + 11z &= 7\end{aligned}$$

2026_03_20_zh1

(4 pont) Oldjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszert.

$$\begin{aligned}2x + y - z &= 8 \\ -3x - y + 2z &= -11 \\ -2x + y + 2z &= -3\end{aligned}$$

2026_06_01_pzh1

(4 pont) Oldjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszert.

$$\begin{aligned}2x - 6y + 5z &= 1 \\ 2x - 5y + 8z &= -3 \\ -4x + 13y - 12z &= -11\end{aligned}$$

1.2. Feladatok: paraméteres egyenletrendszerek**2020_12_21_v**

Hozzuk lépcsős alakra az

$$\begin{aligned}x - 3y + 2z &= 1 \\ 2x - 5y + 7z &= 5 \\ -2x + 8y + az &= b\end{aligned}$$

egyenletrendszert, ahol x, y, z az ismeretlenek. Az $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek mely értékeire van az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása? A megoldást nem kell kiszámolni. A választ indokoljuk.

2025_01_24_v

- (a) (3 pont) Hány megoldása lehet egy három egyenletből álló három ismeretlenes lineáris egyenletrendszernek? Mit mondhatunk az együtthatómátrix determinánsáról az egyes esetekben?
- (b) (3 pont) Adjuk meg az $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek értékét úgy, hogy az alábbi egyenletrendszernek végtelen sok megoldása legyen. A megoldásokat nem kell kiszámolni.

$$\begin{aligned}2x + 11y &= 7 \\ 2x + 6y - 20z &= 2 \\ x + 5y + az &= b\end{aligned}$$

1.3. Elméleti kérdések

2024_01_19_v

- (a) Egy három egyenletből álló három ismeretlenre vonatkozó lineáris egyenletrendszer esetén az együtthatómátrix ismeretében mit mondhatunk az egyenletrendszer megoldásainak számáról?
- (b) A

$$\begin{aligned}3x + 5y + 2z &= 2 \\3x - 2y + z &= 13 \\x + 4y + z &= -3\end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszer esetén a megoldás kiszámolása nélkül csak az együtthatómátrix segítségével határozzuk meg, hány megoldása lehet az egyenletrendszernek. Tudva, hogy az $x = 2, y = -2, z = 3$ egy megoldása az egyenletrendszernek, mennyi lehet a megoldások száma?

2024_06_28_v

Tekintsük a

$$\begin{aligned}2x + y + 3z &= 5 \\y + 3z &= 3\end{aligned}$$

egyenleteket az x, y, z ismeretlenekre. Egészítsük ki ezt egy-egy további egyenlettel úgy, hogy a kapott három egyenletből álló egyenletrendszernek

- (a) ne legyen megoldása.
(b) pontosan egy megoldása legyen.
(c) végtelen sok megoldása legyen.

A megoldásokat nem kell kiszámolni.

2026_06_17_v

- (a) (3 pont) Hány megoldása lehet egy lineáris egyenletrendszernek? Csak az együtthatómátrix alapján melyik megoldásszámot tudjuk biztosan azonosítani?
- (b) (3 pont) Egészítsük ki az

$$\begin{aligned}x + 3y + 4z &= -5 \\y + 2z &= 1\end{aligned}$$

egyenletrendszert többféleképpen úgy, hogy minden lehetséges megoldásszámokat megkapjuk.

2. Lineáris terek

2.1. Elméleti kérdések

2019_06_21_v

Bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$ -ban a

- (a) $(2, 2, 2), (0, 2, 2)$;
(b) $(3, 0, 0), (3, 3, 0), (3, 3, 3)$;
(c) $(4, 4, 0), (4, 0, 4), (0, 4, 4), (4, 4, 4)$

vektorok? A válaszokat indokoljuk. Segítség: gondoljunk az adott vektorok által feszített paralelepipedonra.

2021_01_15_v_A

Tekintsük a

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektorokat. Tegyük fel, hogy a fenti $\underline{u}$ vektor előáll a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként. Ekkor valamely $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ számokkal fennáll a

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \lambda_3 \underline{v}_3 = \underline{u}$$

vektoregyenlőség. Írjuk fel a fenti vektoregyenlőség három komponensének megfelelő három egyenletet a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{u}$ vektorok behelyettesítésével, amelyekben az ismeretlenek a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ számok. Erről a három egyenletből álló három ismeretlenre vonatkozó lineáris egyenletrendszerről a megoldás kiszámolása nélkül hogyan ellenőrizhető, hogy egyértelmű-e a megoldása? A megoldás kiszámolása nélkül döntsük el, hogy ebben az esetben egyértelmű-e a megoldás. Függ-e az egyértelműség az $\underline{u}$ vektor választásától?

2021_01_15_v_B

Tekintsük a

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

vektorokat. Tegyük fel, hogy a fenti $\underline{u}$ vektor előáll a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként. Ekkor valamely $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ számokkal fennáll a

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \lambda_3 \underline{v}_3 = \underline{u}$$

vektoregyenlőség. Írjuk fel a fenti vektoregyenlőség három komponensének megfelelő három egyenletet a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{u}$ vektorok behelyettesítésével, amelyekben az ismeretlenek a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ számok. Erről a három egyenletből álló három ismeretlenre vonatkozó lineáris egyenletrendszerről a megoldás kiszámolása nélkül hogyan ellenőrizhető, hogy egyértelmű-e a megoldása? A megoldás kiszámolása nélkül döntsük el, hogy ebben az esetben egyértelmű-e a megoldás. Függ-e az egyértelműség az $\underline{u}$ vektor választásától?

2024_01_12_v

- (a) Az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3 \in \mathbb{R}^3$ vektorokról hogyan ellenőrizhető, hogy bázist alkotnak-e?
(b) A fenti feltétel alapján döntsük el, hogy az

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

vektorok az $\mathbb{R}^3$ egy bázisa-e.

- (c) Fejezzük ki a

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

vektort az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként. Ehhez oldjuk meg a lineáris kombináció együtthatóira fennálló lineáris egyenletrendszert.

2024_06_14_v

- (a) Egy V vektortérben mikor mondjuk, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ vektorok bázist alkotnak?
(b) Bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$ -ban az $(1, 1, 1), (1, 2, 3)$ vektorok? A választ indokoljuk.
(c) Bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$ -ban az $(1, 1, 1), (1, 2, 3), (4, 3, 2)$ vektorok? A választ indokoljuk.
(d) Bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$ -ban az $(1, 1, 1), (1, 2, 3), (3, 3, 4)$ vektorok? A választ indokoljuk.

2025_01_10_v

- (a) (3 pont) Egy V vektortérben mit jelent, hogy az $U \subseteq V$ részhalmaz alteret alkot?
(b) (3 pont) A $V = \mathbb{R}^3$ vektortérben alteret alkotnak-e az $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}$ és az $U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 1\}$ részhalmazok? A választ röviden indokoljuk.

2025_01_17_v

- (a) (3 pont) Mit jelent, hogy néhány vektor bázist alkot a V vektortérben?
- (b) (1 pont) Bázist alkotnak-e az $\mathbb{R}^3$ vektortérben az $(1, 2, 3)$, $(3, 2, 1)$ vektorok?
- (c) (1 pont) Bázist alkotnak-e az $\mathbb{R}^3$ vektortérben az $(1, 2, 3)$, $(3, 2, 1)$, $(1, 0, 0)$ vektorok?
- (d) (1 pont) Bázist alkotnak-e az $\mathbb{R}^3$ vektortérben az $(1, 2, 3)$, $(3, 2, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ vektorok?

A válaszokat röviden indokoljuk.

2026_01_23_v

- (a) (2 pont) Mit jelent, hogy a V vektortérben az $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ vektorok bázist alkotnak?
- (b) (4 pont) Adottak $\mathbb{R}^3$ -ban az

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix}$$

vektorok. Döntsük el az alábbiak szerint, hogy $\underline{v}$ kifejezhető-e az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként. Tekintsük a lineáris kombinációként való előállítás $\underline{v} = \lambda_1 \underline{u}_1 + \lambda_2 \underline{u}_2 + \lambda_3 \underline{u}_3$ vektoregyenletét, amelyben $\underline{v}, \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ a fent adott vektorok, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ pedig az ismeretlenek. Írjuk fel a fenti vektoregyenlet komponenseit egy lineáris egyenletrendszerként a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ismeretlenekre. Az egyenletrendszer megoldása nélkül csak az együtthatómátrix segítségével döntsük el, hogy az egyenletrendszernek hány megoldása van.

2026_06_09_v

- (a) (3 pont) Hogyan értelmezzük egy V vektortér egy bázisát?
- (b) (3 pont)
 - i. Bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$ -ban a $(2, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$ vektorok?
 - ii. Bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$ -ban a $(2, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(2, 1, -1)$ vektorok?
 - iii. Bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$ -ban a $(2, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(2, 1, -1)$, $(0, 0, 1)$ vektorok?

2026_06_25_v

- (a) (3 pont) Mit értünk a V vektortér egy U alterén?
- (b) (3 pont) Alteret alkotnak-e az $\mathbb{R}^3$ vektortérben az

$$U_1 = \{(x, y, z) : x + 2y - 3z = 0\}, U_2 = \{(x, y, z) : x + 2y - 3z = 2\}, U_3 = \{(x, y, z) : x^2 + 2y - 3z = 0\}$$

halmazok?

3. Vektoriális szorzat

3.1. Feladatok

2021_01_22_v_A

Keressünk az $\mathbb{R}^3$ térben három egymásra páronként merőleges vektorból álló bázist az alábbiak szerint. Legyen $\underline{v}_1 = (1, 1, 1)$ és $\underline{u} = (1, 2, 3)$. Bontsuk fel az $\underline{u}$ vektort a $\underline{v}_1$ -gyel párhuzamos és rá merőleges komponensek összegére. A merőleges komponenst jelöljük $\underline{v}_2$ -vel. A harmadik merőleges vektort a $\underline{v}_3 = \underline{v}_1 \times \underline{v}_2$ vektoriális szorzatként állítsuk elő.

2021_01_22_v_B

Keressünk az $\mathbb{R}^3$ térben három egymásra páronként merőleges vektorból álló bázist az alábbiak szerint. Legyen $\underline{v}_1 = (1, 1, 1)$ és $\underline{u} = (3, 2, 1)$. Bontsuk fel az $\underline{u}$ vektort a $\underline{v}_1$ -gyel párhuzamos és rá merőleges komponensek összegére. A merőleges komponenst jelöljük $\underline{v}_2$ -vel. A harmadik merőleges vektort a $\underline{v}_3 = \underline{v}_1 \times \underline{v}_2$ vektoriális szorzatként állítsuk elő.

2024_01_19_v

Adottak a

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

vektorok. Bontsuk fel az $\underline{u}$ vektort a $\underline{v}_1$ -gyel párhuzamos és rá merőleges komponensek összegére, majd a merőleges komponenst jelöljük $\underline{v}_2$ -vel. Legyen $\underline{v}_3$ a $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ vektorok vektoriális szorzata. Ellenőrizzük, hogy $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ páronként merőleges vektorok.

2025_01_24_v

- (a) (2 pont) Adottak az $\underline{u}_1 = (1, 2, 3)$ és $\underline{u}_2 = (3, -3, 1)$ egymásra merőleges vektorok. Válasszunk egy olyan $\underline{u}_3$ vektort, amely merőleges $\underline{u}_1$ -re és $\underline{u}_2$ -re is, és számoljuk ki $\underline{u}_3$ koordinátáit.
- (b) (3 pont) Legyen $\underline{v} = (18, -5, -12)$. Állítsuk elő a $\underline{v}$ vektort az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ bázisban az alábbiak szerint. Bontsuk fel $\underline{v}$ -t az $\underline{u}_1$ -gyel párhuzamos és rá merőleges komponensek összegére. Ezután a merőleges komponenst bontsuk fel $\underline{u}_2$ -vel párhuzamos és rá merőleges komponensek összegére.

2025_12_17_v

(5 pont) Adott a $\underline{v}_1 = (2, -1, 1)$ és az $\underline{u} = (-2, 5, -3)$ vektorok a térben. Számítsuk ki az $\underline{u}$ vektornak a $\underline{v}_1$ -gyel párhuzamos és merőleges komponenseit. Jelölje a merőleges komponenst $\underline{v}_2$. Határozzuk meg a $\underline{v}_3 = \underline{v}_1 \times \underline{v}_2$ vektoriális szorzással adott vektor koordinátáit. Végül skaláris szorzással ellenőrizzük, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ vektorok páronként merőlegesek egymásra.

2026_06_01_pzh1

(2+2+2+1 pont) Adottak a térben az $A(1, 1, 1)$, $B(6, 3, -3)$ és $C(7, 5, -2)$ pontok.

- (a) Írjuk fel annak a D pontnak a koordinátáit, amellyel az $ABDC$ pontok egy paralelogramma csúcsai.
- (b) Számítsuk ki az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok vektoriális szorzatát.
- (c) A (b) feladat eredményének segítségével írjuk fel az A, B, C, D pontokat tartalmazó sík egyenletét.
- (d) Mekkora az $ABDC$ paralelogramma területe?

3.2. Elméleti kérdések

2019_06_21_v

- (a) Melyek az $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorok vektoriális szorzatának definiáló tulajdonságai (hossz, irány, állás)?
- (b) A képletgyűjtemény alapján számoljuk ki az $\underline{u} = (5, -1, 1)$ és $\underline{v} = (4, -3, 2)$ vektorok vektoriális szorzatát, majd ellenőrizzük a definícióban szereplő merőlegességeket skaláris szorzással.

2021_01_08_v_A

- (a) Számítsuk ki az $\underline{u} = (2, 0, -1)$ és $\underline{v} = (1, 2, -1)$ vektorok vektoriális szorzatát.
- (b) Ellenőrizzük az $\underline{u} \times \underline{v}$ vektoriális szorzat definíciójában szereplő merőlegességi tulajdonságot.
- (c) Számítsuk ki az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok skaláris szorzatából az általuk bezárt szög koszinuszát, majd ebből a szög szinuszt.
- (d) Ellenőrizzük, hogy a fenti $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok esetén teljesül az $\underline{u} \times \underline{v}$ definíciójában szereplő, a vektoriális szorzat hosszára vonatkozó összefüggés.

2021_01_08_v_B

- (a) Számítsuk ki az $\underline{u} = (0, -1, 2)$ és $\underline{v} = (2, -1, 1)$ vektorok vektoriális szorzatát.
- (b) Ellenőrizzük az $\underline{u} \times \underline{v}$ vektoriális szorzat definíciójában szereplő merőlegességi tulajdonságot.
- (c) Számítsuk ki az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok skaláris szorzatából az általuk bezárt szög koszinuszát, majd ebből a szög szinuszt.
- (d) Ellenőrizzük, hogy a fenti $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok esetén teljesül az $\underline{u} \times \underline{v}$ definíciójában szereplő, a vektoriális szorzat hosszára vonatkozó összefüggés.

2021_01_08_v_C

- (a) Számítsuk ki az $\underline{u} = (1, -2, 0)$ és $\underline{v} = (1, -1, -2)$ vektorok vektoriális szorzatát.
- (b) Ellenőrizzük az $\underline{u} \times \underline{v}$ vektoriális szorzat definíciójában szereplő merőlegességi tulajdonságot.
- (c) Számítsuk ki az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok skaláris szorzatából az általuk bezárt szög koszinuszát, majd ebből a szög szinuszt.
- (d) Ellenőrizzük, hogy a fenti $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok esetén teljesül az $\underline{u} \times \underline{v}$ definíciójában szereplő, a vektoriális szorzat hosszára vonatkozó összefüggés.

2022_06_15_v

- (a) Adott $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorok esetén hogyan jellemezhetjük a $\underline{u} \times \underline{v}$ vektoriális szorzat irányát, nagyságát és állását?
- (b) Az $\underline{u} = (1, 2, 0)$ és $\underline{v} = (3, 1, 1)$ vektorok esetén számoljuk ki a vektoriális szorzatukat, majd határozzuk meg az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ által bezárt α szög szinuszt. Az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ skaláris szorzatának segítségével számoljuk ki a bezárt szög koszinuszát. Végül ellenőrizzük a $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ összefüggést.

2023_12_20_v

- (a) Az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^3$ vektorok esetén hogyan számítható ki az általuk feszített paralelepipedon térfogata?
- (b) Végezzük el ezt a számítást az

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

esetben.

- (c) Vegyük észre, hogy az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által feszített oldalhoz tartozó magasság nem változik, ha $\underline{c}$ -hez $\underline{a}$ -t vagy $\underline{b}$ -t hozzáadjuk, így a térfogat is változatlan marad. Számoljuk ki az új $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} + \underline{a}$ és $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} + \underline{b}$ által feszített paralelepipedonok térfogatát is.
- (d) A determináns milyen tulajdonsága miatt tudható a fenti eredmény számolás nélkül is?

2024_01_26_v

- (a) Mik az $\underline{u} \times \underline{v}$ vektoriális szorzat definiáló tulajdonságai (irány, nagyság, állás)?
- (b) Legyen

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

és jelölje α az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok szögét. Számoljuk ki az $\underline{u} \times \underline{v}$ vektoriális szorzatot, majd ebből határozzuk meg $\sin \alpha$ -t. Számoljuk ki az $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ skaláris szorzatot, majd ebből határozzuk meg $\cos \alpha$ -t. Ellenőrizzük a $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ egyenlőséget.

2024_12_16_v

- (a) (3 pont) Milyen tulajdonságokkal értelmezzük két $\mathbb{R}^3$ -beli vektor vektoriális szorzatát (hossz, irány, állás)?
- (b) (3 pont) Számoljuk ki az $\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorok vektoriális szorzatát, majd skaláris szorzással ellenőrizzük az irányra vonatkozó feltételt ebben az esetben.

2026_01_09_v

- (a) (2 pont) Milyen tulajdonságok értelmezik az $\mathbb{R}^3$ -beli $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok $\underline{u} \times \underline{v}$ vektoriális szorzatát?
- (b) (2 pont) A fenti tulajdonságok segítségével állapítsuk meg, hogyan viszonyul egymáshoz az $\underline{u} \times \underline{v}$ és a $\underline{v} \times \underline{u}$ vektoriális szorzat?
- (c) (2 pont) Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ esetén számoljuk ki az $\underline{u} \times \underline{v}$ és a $\underline{v} \times \underline{u}$ vektoriális szorzatokat.

2026_06_01_v

- (a) (3 pont) Hogyan értelmezzük az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$ vektorok vegyesszorzatát? (A kiszámítás módját nem kell leírni.) Mi a vegyesszorzat geometriai jelentése?
- (b) (3 pont) Legyen

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki először az $\underline{u} \times \underline{v}$ vektoriális szorzatot, majd ennek segítségével az $\underline{u} \underline{v} \underline{w}$ vegyesszorzatot. Ellenőrizzük, hogy az eredmény megegyezik-e azzal az értékkel, amelyet a vegyesszorzatra a determináns kiszámolásával kaphatunk?

4. Mátrixok**4.1. Feladatok: determináns, inverz****2019_05_20_pzh1**

(5 pont) Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixot és sorvektort. Határozzuk meg az A mátrix determinánsát. Számoljuk ki az A^{-1} inverzmátrixot, majd a $\underline{b}A^{-1}$ szorzatot.

2019_05_28_v

Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixokat.

- (a) Amelyik mátrixnak létezik az inverze, azt számoljuk ki.
- (b) A kilenc lehetséges XY mátrixszorzás közül, ahol X és Y a fenti három mátrix valamelyike (X és Y azonos is lehet), számoljuk ki azokat, amelyek értelmezettek.

2020_10_19_zh1_A_1

(5 pont) Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mátrixot és oszlopvektort. Határozzuk meg az A mátrix determinánsát. Számítsuk ki az A^{-1} inverzmátrixot és a $A^{-1}\underline{v}$ mátrixszorzatot.

2020_10_19_zh1_B_1

(5 pont) Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mátrixot és oszlopvektort. Határozzuk meg az A mátrix determinánsát. Számítsuk ki az A^{-1} inverzmátrixot és a $A^{-1}\underline{v}$ mátrixszorzatot.

2020_10_19_zh1_C_1

(5 pont) Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mátrixot és oszlopvektort. Határozzuk meg az A mátrix determinánsát. Számítsuk ki az A^{-1} inverzmátrixot és a $A^{-1}\underline{v}$ mátrixszorzatot.

2020_10_19_zh1_D_1

(5 pont) Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mátrixot és oszlopvektort. Határozzuk meg az A mátrix determinánsát. Számítsuk ki az A^{-1} inverzmátrixot és a $A^{-1}\underline{v}$ mátrixszorzatot.

2020_12_14_pzh1_A_1

(4 pont) Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

mátrixot. Határozzuk meg az A mátrix determinánsát, majd számítsuk ki az A^{-1} inverzmátrixot.

2020_12_14_pzh1_B_1

(4 pont) Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrixot. Határozzuk meg az A mátrix determinánsát, majd számítsuk ki az A^{-1} inverzmátrixot.

2022_06_15_v_4

Adottak az

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mátrix és vektorok. Számoljuk ki a A mátrix inverzét majd az $\underline{u}^T A^{-1} \underline{v}$ szorzatot.

2023_10_04_zh1_A

(4 pont) Számítsuk ki az

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix inverzét.

2023_10_04_zh1_B

(4 pont) Számítsuk ki az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix inverzét.

2023_12_11_pzh1

(5 pont) Számítsuk ki az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

mátrix A^{-1} inverzét.

2024_01_19_v

Adottak az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mátrix és vektor. Számítsuk ki az A^{-1} inverzmátrixot és az $\underline{e}_3^T A^{-1} \underline{e}_3$ szorzatot.

2024_03_22_zh1_A

(5 pont) Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mátrixot és vektort. Számítsuk ki az A mátrix determinánsát és inverzét majd az $A^{-1}\underline{v}$ szorzatot.

2024_03_22_zh1_B

(5 pont) Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mátrixot és vektort. Számítsuk ki az A mátrix determinánsát és inverzét majd az $A^{-1}\underline{v}$ szorzatot.

2024_05_27_pzh1

(5 pont) Számoljuk ki az

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsát és inverzét.

2025_10_06_zh1_A

(5 pont) Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

mátrixot és vektort. Számoljuk ki az A^{-1} inverzmátrixot és az $A^{-1}\underline{v}$ szorzatot.

2025_10_06_zh1_B

(5 pont) Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mátrixot és vektort. Számoljuk ki az A^{-1} inverzmátrixot és az $A^{-1}\underline{v}$ szorzatot.

2025_12_15_pzh1

(5 pont) Számoljuk ki az

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsát és inverzét.

2026_03_20_zh1_A

(5 pont) Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mátrixot és vektort. Számoljuk ki az A^{-1} inverzmátrixot és az $A^{-1}\underline{v}$ szorzatot.**2026_03_20_zh1_B**

(5 pont) Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mátrixot és vektort. Számoljuk ki az A^{-1} inverzmátrixot és az $A^{-1}\underline{v}$ szorzatot.**2026_06_01_pzh1**

(5 pont) Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -6 & 5 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

mátrixot és oszlopvektort. Határozzuk meg az A mátrix determinánsát. Számoljuk ki az A^{-1} inverzmátrixot, majd az $A^{-1}\underline{b}$ szorzatot.**4.2. Feladatok: inverz létezése paramétertől függően****2022_05_23_pzh1_1**

(5 pont) Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & p \end{pmatrix}$$

mátrixot, amelyben $p \in \mathbb{R}$ valós paraméter. A p paraméter függvényében határozzuk meg az A mátrix determinánsát. A p mely értéke esetén lesz a determináns értéke -1 ? A p ezen választása esetén számoljuk ki az A^{-1} inverzmátrixot.**2024_09_30_zh1_A**

(2+3 pont) Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ p & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixot, ahol $p \in \mathbb{R}$ valós paraméter.

- A p paraméter mely értékére nem létezik az A mátrixnak inverze?
- Válasszuk p -t úgy, hogy az A mátrix determinánsa 1 legyen. Ezen választás mellett számoljuk ki az A^{-1} inverzmátrixot.

2024_09_30_zh1_B

(2+3 pont) Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & p \end{pmatrix}$$

mátrixot, ahol $p \in \mathbb{R}$ valós paraméter.

- A p paraméter mely értékére nem létezik az A mátrixnak inverze?
- Válasszuk p -t úgy, hogy az A mátrix determinánsa 1 legyen. Ezen választás mellett számoljuk ki az A^{-1} inverzmátrixot.

2024_12_09_pzh1

(5 pont) Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 2 \\ 1 & p & 3 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrixot, ahol $p \in \mathbb{R}$ valós paraméter. Határozzuk meg az A mátrix determinánsát. A p paraméter mely értékeire létezik az A mátrix inverze. Számoljuk ki az A^{-1} inverzmátrixot abban az esetben, amikor A determinánsa 1.

4.3. Feladatok: sajátérték, sajátvektor, diagonalizálás**2020_10_19_zh1_A_4**

(5 pont) Számítsuk ki az

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és egy-egy hozzájuk tartozó sajátvektort.

2020_10_19_zh1_B_4

(5 pont) Számítsuk ki az

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és egy-egy hozzájuk tartozó sajátvektort.

2020_10_19_zh1_C_4

(5 pont) Számítsuk ki az

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és egy-egy hozzájuk tartozó sajátvektort.

2020_10_19_zh1_D_4

(5 pont) Számítsuk ki az

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és egy-egy hozzájuk tartozó sajátvektort.

2020_12_14_pzh1_A_4

(5 pont) Számítsuk ki az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és egy-egy hozzájuk tartozó sajátvektort.

2020_12_14_pzh1_B_4

(5 pont) Számítsuk ki az

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és egy-egy hozzájuk tartozó sajátvektort.

2021_01_08_v_A

Végezzünk ortogonális diagonalizációt az

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

mátrixon, azaz írjuk fel $A = PDP^T$ alakban, ahol P ortogonális, D pedig diagonális mátrix. Ennek segítségével számoljuk ki az A^{10} mátrixot.

2021_01_08_v_B

Végezzünk ortogonális diagonalizációt az

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

mátrixon, azaz írjuk fel $A = PDP^T$ alakban, ahol P ortogonális, D pedig diagonális mátrix. Ennek segítségével számoljuk ki az A^{10} mátrixot.

2021_01_08_v_C

Végezzünk ortogonális diagonalizációt az

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrixon, azaz írjuk fel $A = PDP^T$ alakban, ahol P ortogonális, D pedig diagonális mátrix. Ennek segítségével számoljuk ki az A^{10} mátrixot.

2021_01_08_v_D

Végezzünk ortogonális diagonalizációt az

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrixon, azaz írjuk fel $A = PDP^T$ alakban, ahol P ortogonális, D pedig diagonális mátrix. Ennek segítségével számoljuk ki az A^{10} mátrixot.

2021_01_22_v_A

Diagonalizáljuk az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrixot, azaz írjuk fel $A = PDP^{-1}$ alakban, ahol D diagonális mátrix. Számoljuk ki a P^{-1} inverzmátrixot is.

2021_01_22_v_B

Diagonalizáljuk az

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixot, azaz írjuk fel $A = PDP^{-1}$ alakban, ahol D diagonális mátrix. Számoljuk ki a P^{-1} inverzmátrixot is.

2021_01_22_v_C

Diagonalizáljuk az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrixot, azaz írjuk fel $A = PDP^{-1}$ alakban, ahol D diagonális mátrix. Számoljuk ki a P^{-1} inverzmátrixot is.

2022_05_23_pzh1_4

(5 pont) Számítsuk ki az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és egy-egy hozzájuk tartozó sajátvektort.

2022_06_15_v_5

Az

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrixnak az $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorok sajátvektorai. Ennek segítségével ortogonálisan diagonalizáljuk az

A mátrixot, azaz írjuk fel $A = PDP^T$ alakban alkalmas P ortogonális és D diagonális mátrixokkal. Az előbbieket felhasználásával írjuk fel az A^{10} mátrixhatványt három mátrix szorzataként, amelyeket külön-külön meg kell adni, de a szorzatukat már nem kell kiszámolni.

4.4. Elméleti kérdések**2019_06_04_v**

Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \underline{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mátrixokat és vektorokat.

- Mit mondhatunk annak a kétismeretlenes két egyenletből álló lineáris egyenletrendszernek a megoldásai számáról, amelyről csak annyit tudunk, hogy az együtthatómátrixa a fenti A mátrix? Mi a helyzet akkor, ha az együtthatómátrix a fenti B ?
- Hogyan pontosíthatjuk a megoldásszámról vonatkozó információkat, ha megtudjuk, hogy az egyenletrendszer jobb oldalainak vektora a fenti $\underline{c}$ vektor? És ha a fenti $\underline{d}$ vektor?

2025_12_17_v

- (3 pont) Írjuk fel, hogyan fejtjük ki a 3×3 -as A mátrix determinánsát a második sora szerint. A mátrix i -edik sorának j -edik elemét jelölje a_{ij} . A válasz tartalmazhatja 2×2 -es mátrixok determinánsát, azt nem kell kifejtetni.
- (3 pont) Fejtsük ki az

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsát a második sora szerint. A válaszban szereplő 2×2 -es mátrixok determinánsát is számoljuk ki, és határozzuk meg a végeredményt.

2026_01_30_v

- (3 pont) Hogyan értelmezzük egy A négyzetes mátrix inverzét? (A kiszámítás módját nem kell leírni.) Hogyan ellenőrizhetők, hogy egy A négyzetes mátrixnak létezik-e az inverze?
- (3 pont) Az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

mátrixok közül melyiknek van inverze? Számoljuk ki, amelyiknek van.

5. Lineáris transzformációk

5.1. Feladatok: forgatások, nyújtások, tükrözések mátrixai

2019_03_06_zh1

(5 pont) Írjuk fel annak a térbeli lineáris transzformációnak az A mátrixát, amely az yz síkban az origó körül π szöggel forgat, x irányban pedig 2-szeresére nyújt. A kapott mátrixszal való szorzással számoljuk ki a $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ vektor képét.

2019_05_20_pzh

(5 pont) Írjuk fel annak a térbeli lineáris transzformációnak az A mátrixát, amely minden vektort az $y = -x$ síkra tükröz. A kapott mátrixszal való szorzással számoljuk ki a $\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$ vektor képét, majd az eredményül kapott vektort újra szorozzuk be a transzformáció mátrixával.

2020_10_19_zh1_A

(5 pont) Írjuk fel annak a térbeli lineáris transzformációnak az A mátrixát, amely az xy síkban az origó körül $3\pi/4$ szöggel forgat, z irányban pedig -2 -szeresére nyújt. Számoljuk ki a kapott mátrix determinánsát.

2020_10_19_zh1_B

(5 pont) Írjuk fel annak a térbeli lineáris transzformációnak az A mátrixát, amely az xy síkban az origó körül $5\pi/4$ szöggel forgat, z irányban pedig -3 -szorosára nyújt. Számoljuk ki a kapott mátrix determinánsát.

2020_10_19_zh1_C

(5 pont) Írjuk fel annak a térbeli lineáris transzformációnak az A mátrixát, amely az yz síkban az origó körül $5\pi/4$ szöggel forgat, z irányban pedig -2 -szeresére nyújt. Számoljuk ki a kapott mátrix determinánsát.

2020_10_19_zh1_D

(5 pont) Írjuk fel annak a térbeli lineáris transzformációnak az A mátrixát, amely az yz síkban az origó körül $3\pi/4$ szöggel forgat, z irányban pedig -3 -szorosára nyújt. Számoljuk ki a kapott mátrix determinánsát.

2021_01_15_v_A

Írjuk fel annak az $\mathbb{R}^3$ -beli lineáris transzformációnak az A mátrixát, amely minden vektort az x tengely körül $\pi/2$ szöggel megforgat olyan irányban, hogy az y tengely pozitív felét a z tengely pozitív felébe viszi. Számítsuk ki a kapott A mátrix determinánsát és inverzét. Milyen transzformáció mátrixa az A^{-1} inverzmátrix?

2021_01_15_v_B

Írjuk fel annak az $\mathbb{R}^3$ -beli lineáris transzformációnak az A mátrixát, amely minden vektort az x tengely körül $\pi/2$ szöggel megforgat olyan irányban, hogy a z tengely pozitív felét az y tengely pozitív felébe viszi. Számítsuk ki a kapott A mátrix determinánsát és inverzét. Milyen transzformáció mátrixa az A^{-1} inverzmátrix?

2022_03_24_zh1_A

(3+2 pont)

- Írjuk fel annak az $\mathbb{R}^3$ térbeli lineáris transzformációnak az A mátrixát, amely az $x = y$ síkra tükröz.
- Számítsuk ki az A^{-1} inverzmátrixot.

2022_03_24_zh1_B

(3+2 pont)

- (a) Írjuk fel annak az $\mathbb{R}^3$ térbeli lineáris transzformációnak az A mátrixát, amely az $y = z$ síkra tükröz.
- (b) Számítsuk ki az A^{-1} inverzmátrixot.

2023_12_11_pzh1

(5 pont) Írjuk fel annak az $\mathbb{R}^2$ síkbeli lineáris transzformációnak az A mátrixát, amely az origó körül az óramutató járásával ellentétes irányban $\pi/6$ szöggel forgat. Számítsuk ki a kapott A mátrix determinánsát. Segítség: használjuk a $\sin \pi/6 = 1/2$ és $\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$ összefüggéseket.

2024_01_12_v

Írjuk fel annak az $\mathbb{R}^3$ térbeli lineáris transzformációnak az A mátrixát, amely az xy síkban $\pi/2$ szöggel forgat, a z irányban pedig háromszorosára nyújt. Számítsuk ki a kapott A mátrix A^{-1} inverzmátrixát.

2024_05_27_pzh

(5 pont) Legyen A az $\mathbb{R}^3$ tér azon lineáris transzformációjának mátrixa, amely az xz síkban $\pi/2$ szöggel forgat olyan módon, hogy az x tengely pozitív iránya a z tengely pozitív irányába megy át, az y koordinátaírányban pedig a transzformáció $1/2$ -szeresére zsugorít. Írjuk fel az A mátrixot és a

$\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ vektor képét a transzformációnál.

2024_09_30_zh1_A

(5 pont) Legyen A az $\mathbb{R}^3$ tér azon lineáris transzformációjának a mátrixa, amely az xz síkban $\pi/2$ szöggel forgat úgy, hogy az x tengely pozitív felét a z tengely pozitív felébe viszi, az y irányban pedig $-1/2$ -szeresére zsugorít.

Írjuk fel az A mátrixot, és számoljuk ki az $\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ vektor képét.

2024_09_30_zh1_B

(5 pont) Legyen A az $\mathbb{R}^3$ tér azon lineáris transzformációjának a mátrixa, amely az yz síkban $\pi/2$ szöggel forgat úgy, hogy a z tengely pozitív felét az y tengely pozitív felébe viszi, az x irányban pedig 3-szorosára nyújt. Írjuk

fel az A mátrixot, és számoljuk ki az $\underline{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ vektor képét.

2024_12_09_pzh1

(5 pont) Írjuk fel annak az $\mathbb{R}^3$ térbeli lineáris transzformációnak az A mátrixát, amely tetszőleges vektorhoz annak az $x + z = 0$ síkra vett tükörképét rendeli. Ezen A mátrixszal való szorzás segítségével számoljuk ki,

mit rendel a transzformáció az $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ vektorhoz, ill. az eredményül kapott vektorhoz.

2025_10_06_zh1_A

(5 pont) Legyen A az $\mathbb{R}^3$ tér azon lineáris transzformációjának a mátrixa, amely az xz síkra tükröz. Írjuk fel az

A mátrixot, és számoljuk ki az $\underline{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ vektor képét, majd a képvektor képét is.

2025_10_06_zh1_B

(5 pont) Legyen A az $\mathbb{R}^3$ tér azon lineáris transzformációjának a mátrixa, amely az yz síkra tükröz. Írjuk fel az

A mátrixot, és számoljuk ki az $\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ vektor képét, majd a képvektor képét is.

2025_12_15_pzh

(5 pont) Legyen A az $\mathbb{R}^3$ tér azon lineáris transzformációjának mátrixa, amely a z tengely körül $\pi/2$ szöggel forgat olyan módon, hogy az y tengely pozitív iránya az x tengely pozitív irányába megy át, a z irányban pedig a transzformáció 3-szorosan nyújt. Írjuk fel az A mátrixot és a

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ vektor képét a transzformációnál.}$$

2026_03_20_zh1_A

(5 pont) Legyen A az $\mathbb{R}^3$ tér azon lineáris transzformációjának a mátrixa, amely az xz síkban π szöggel forgat az x tengely pozitív felét a z tengely pozitív felébe vivő irányban, az y irányban pedig a vektorok állását megfordítja,

hosszát háromszorosára nyújtja. Írjuk fel az A mátrixot, és számoljuk ki az $\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ vektor képét.

2026_03_20_zh1_B

(5 pont) Legyen A az $\mathbb{R}^3$ tér azon lineáris transzformációjának a mátrixa, amely az xz síkban π szöggel forgat az x tengely pozitív felét a z tengely pozitív felébe vivő irányban, az y irányban pedig a vektorok állását megfordítja,

hosszát háromszorosára nyújtja. Írjuk fel az A mátrixot, és számoljuk ki az $\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ vektor képét.

2026_06_01_pzh1

(4 pont) Írjuk fel annak a térbeli lineáris transzformációnak az A mátrixát, amely minden vektort az

$$y = -x \text{ síkra tükröz. A kapott mátrixszal való szorzással számoljuk ki a } \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ vektor képét, majd az}$$

eredményül kapott vektort újra szorozzuk be a transzformáció mátrixával.

5.2. Feladatok: vetítések mátrixai**2020_12_14_pzh1_A**

(2+2+2 pont) Legyen $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Tekintsük az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektor felbontását a $\underline{v}$ -vel párhuzamos és rá merőleges komponensek összegére.

Számoljuk ki ezek közül a párhuzamos komponenst.

(b) Tekintsük a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektor felbontását a $\underline{v}$ -vel párhuzamos és rá merőleges komponensek összegére.

Számoljuk ki ezek közül a párhuzamos komponenst.

(c) Írjuk fel az $\mathbb{R}^2$ síkban a $\underline{v}$ vektor egyenesére való merőleges vetítés mátrixát.

2020_12_14_pzh1_B

(2+2+2 pont) Legyen $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Tekintsük az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektor felbontását a $\underline{v}$ -vel párhuzamos és rá merőleges komponensek összegére.

Számoljuk ki ezek közül a párhuzamos komponenst.

- (b) Tekintsük a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektor felbontását a $\underline{v}$ -vel párhuzamos és rá merőleges komponensek összegére. Számoljuk ki ezek közül a párhuzamos komponensét.
- (c) Írjuk fel az $\mathbb{R}^2$ síkban a $\underline{v}$ vektor egyenesére való merőleges vetítés mátrixát.

2022_05_23_pzh

(5 pont) Írjuk fel annak az $\mathbb{R}^2$ síkbeli lineáris transzformációnak az A mátrixát, amely merőlegesen vetít az $x + y = 0$ egyenletű egyenesre. Ezen A mátrixszal való szorzás segítségével számoljuk ki, mit rendel a transzformáció a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ vektorhoz. Milyen vektort kapunk a transzformáció újbóli alkalmazásával?

2023_10_04_zh1_A

(4+2 pont) Tekintsük a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorokat a térben.

- (a) Számítsuk ki a $\underline{v}$ vektornak az $\underline{e}_1$ -gyel párhuzamos komponensét az $\underline{e}_1$ -gyel párhuzamos és rá merőleges komponensekre való felbontásban.¹ A merőleges komponens nem kell kiszámolni. Végezzük el ugyanezt az $\underline{e}_1$ helyett az $\underline{e}_2$ ill. $\underline{e}_3$ vektorokkal külön-külön.
- (b) A fentiek segítségével írjuk fel annak a térbeli lineáris transzformációnak a mátrixát, amely merőlegesen vetít a $\underline{v}$ vektor egyenesére.

2023_10_04_zh1_B

(4+2 pont) Tekintsük a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorokat a térben.

- (a) Számítsuk ki a $\underline{v}$ vektornak az $\underline{e}_1$ -gyel párhuzamos komponensét az $\underline{e}_1$ -gyel párhuzamos és rá merőleges komponensekre való felbontásban.¹ A merőleges komponens nem kell kiszámolni. Végezzük el ugyanezt az $\underline{e}_1$ helyett az $\underline{e}_2$ ill. $\underline{e}_3$ vektorokkal külön-külön.
- (b) A fentiek segítségével írjuk fel annak a térbeli lineáris transzformációnak a mátrixát, amely merőlegesen vetít a $\underline{v}$ vektor egyenesére.

2026_01_23_v

(5 pont) Az $\mathbb{R}^2$ síkban írjuk fel az origón átmenő $\underline{u} = (3, -4)$ vektorral párhuzamos egyenesre való merőleges vetítés mátrixát. Ehhez az $\mathbb{R}^2$ tér standard bázisvektorainak képét úgy kaphatjuk meg, hogy mindegyiket felbontjuk az $\underline{u}$ -val párhuzamos és rá merőleges komponensek összegére. A transzformáció egy bázisvektorhoz az $\underline{u}$ -val párhuzamos komponensét rendeli.

2026_06_01_v

(5 pont) Legyen

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg a párhuzamos komponensét a $\underline{v}_1$ vektor $\underline{u}$ -val párhuzamos és merőleges összetevőkre bontásában. Hasonlóan számoljuk ki a $\underline{v}_2$ vektor $\underline{u}$ -val párhuzamos komponensét. (A merőleges komponenseket nem kell kiszámolni.) Ezek segítségével írjuk fel annak az $\mathbb{R}^2$ síkbeli lineáris transzformációnak a mátrixát, amely az $\underline{u}$ vektor egyenesére vetít merőlegesen.

5.3. Feladatok: transzformációk szorzata és felcserélhetősége

2024_01_26_v

Írjuk fel annak az $\mathbb{R}^2$ síkbeli lineáris transzformációnak az A mátrixát, amely az $y = x$ egyenesre tükröz. Írjuk fel annak az $\mathbb{R}^2$ síkbeli lineáris transzformációnak a B mátrixát, amely az y tengelyre tükröz. Számítsuk ki az AB mátrixszorzatot, amely annak az összetett transzformációnak a mátrixa, amely először B aztán A alkalmazásának felel meg. Számítsuk ki a BA mátrixszorzatot is, és a két szorzat összehasonlításával indokoljuk meg, hogy a két transzformáció nem felcserélhető.

2024_03_22_zh1

(5 pont) Legyen A az $\mathbb{R}^2$ sík azon lineáris transzformációjának a mátrixa, amely az $y = x$ egyenesre tükröz, B pedig az $x + y = 0$ -ra való tükrözés mátrixa. Írjuk fel az A és B mátrixokat. Mutassuk meg, hogy a két transzformáció felcserélhető, azaz teljesül az $AB = BA$ egyenlőség.

2024_06_07_v

Jelölje A az yz síkra való merőleges vetítés mint $\mathbb{R}^3$ térbeli lineáris transzformáció mátrixát, B pedig a z tengely körüli $\pi/2$ szöggel való forgatás mátrixát, amely az x tengely pozitív felét az y tengely negatív

felébe viszi. Írjuk fel az A és B transzformációmátrixokat. A $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ vektoron mátrixszorzás segítségével

ellenőrizzük, hogy először az A majd a B transzformációt elvégezve más eredményt kapunk, mint fordított sorrendben.

2026_01_09_v

(5 pont) Legyen A az $\mathbb{R}^2$ síkban az $y = x$ egyenesre való vetítés mátrixa, B pedig az $y = -x$ egyenesre vetítés mátrixa. Írjuk fel az A és B mátrixokat, és mátrixszorzás segítségével számoljuk ki az összetett leképezés AB mátrixát.

5.4. Elméleti kérdések

2019_05_28_v

- (a) Tegyük fel, hogy az $\mathbb{R}^3$ tér egy lineáris leképezéséről tudjuk, hogy mik az $\mathbb{R}^3$ tér standard bázisának képei a leképezésnél. Hogyan írjuk fel ezen képvektorok segítségével a leképezés mátrixát? A leképezés mátrixának segítségével hogyan számoljuk ki egy tetszőleges vektor képét?
- (b) Tekintsük azt a lineáris leképezést, amely az x irányban az yz síkra merőlegesen vetít, az y irányban kétszeresére, a z irányban háromszorosára nyújt. Írjuk fel a leképezés mátrixát, majd a segítségével számoljuk ki az $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektor képét.

2022_06_03_v

- (a) Legyen adott az $\mathbb{R}^3$ tér egy lineáris transzformációjának A mátrixa. A transzformáció A mátrixának ismeretében hogyan ellenőrizhető, hogy a standard bázis vektoraira külön-külön alkalmazva a lineáris transzformációt olyan vektorokhoz jutunk-e, amelyek az $\mathbb{R}^3$ tér egy bázisát alkotják?
- (b) Írjuk fel annak a lineáris transzformációnak a mátrixát, amely az xz síkban $\pi/2$ szöggel forgat, az y irányban pedig kétszeresére nyújt. Ellenőrizzük az előző részben szereplő feltételt.

2025_01_24_v

- (a) (2 pont) Egy $\mathbb{R}^3$ -beli vektorokra alkalmazható lineáris transzformáció mátrixa hogyan írható fel $\mathbb{R}^3$ bázisvektorainak képeivel?
- (b) (1 pont) Mi három $\mathbb{R}^3$ -beli vektor vegyes szorzatának geometriai jelentése?
- (c) (3 pont) Írjuk fel annak az $\mathbb{R}^3$ térbeli lineáris transzformációnak a mátrixát, amely az xy síkban $\pi/2$ -vel forgat (az x tengely pozitív felét az y tengely pozitív felébe viszi), a z irányban pedig kétszeresére nyújt. Számítsuk ki a bázisvektorok képeinek vegyes szorzatát.

6. Koordinátageometria

6.1. Feladatok: paraméterrel megadott egyenesek

2019_06_21_v

Adott a térben az

$$\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = 4 - t \\ z = t + 8 \end{cases}$$

egyenes és a $P = (3, 5, 9)$ pont. Határozzuk meg a pont és az egyenes távolságát az alábbi lépésekben. Először válasszuk ki az egyenes egy tetszőleges pontját, majd írjuk fel a választott pontból a P -be mutató vektort. Ezután bontsuk fel a kapott vektort az egyenes irányvektorával párhuzamos és rá merőleges komponensek összegére. A merőleges komponens hossza a keresett távolsággal egyenlő.

2020_12_14_pzh1_A

(2+2+1 pont) Tekintsük a térben az

$$\begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4s - 1 \\ y = 2 \\ z = s - 6 \end{cases}$$

egyenletrendszerrel adott két egyenest. (Helyesen az első egyenesnél $x = 7 + 2t$.)

- (a) Határozzuk meg a két egyenes metszéspontját.
- (b) Számítsuk ki a két egyenes irányvektorának vektoriális szorzatát.
- (c) Írjuk fel a két egyenes által kifeszített sík egyenletét.

2020_12_14_pzh1_B

(2+2+1 pont) Tekintsük a térben az

$$\begin{cases} x = t - 6 \\ y = 4t - 1 \\ z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3s + 1 \\ y = 2s + 8 \\ z = -s \end{cases}$$

egyenletrendszerrel adott két egyenest. (Helyesen a második egyenesnél $y = 2s + 7$.)

- (a) Határozzuk meg a két egyenes metszéspontját.
- (b) Számítsuk ki a két egyenes irányvektorának vektoriális szorzatát.
- (c) Írjuk fel a két egyenes által kifeszített sík egyenletét.

2022_06_03_v

Határozzuk meg az

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = 5 - t \\ z = 3t + 2 \end{cases}$$

egyenes és a $P = (1, 3, -2)$ pont távolságát a következő lépésekben. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az egyenesre és illeszkedik a P pontra. Számoljuk ki a sík és az egyenes metszéspontját, majd határozzuk meg a metszéspont és P távolságát.

2022_06_27_v

Adottak az

$$e = \begin{cases} x = t - 3 \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases} \quad f = \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 3 \\ z = 3 + 3t \end{cases}$$

egyenesek. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely az e egyenest tartalmazza, és párhuzamos az f egyenessel. Segítség: a keresett sík normálvektora merőleges mindkét egyenesre.

2024_01_12_v

Írjuk fel az

$$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 2t - 4 \\ z = 1 - t \end{cases}$$

egyenes $t = 1$ paraméterértékű pontján átmenő és az egyenesre merőleges sík egyenletét. Milyen távolságra van ettől a síktól a $Q = (3, 0, -1)$ pont?

2024_03_22_zh1

(2+2+2 pont) Számoljuk ki az

$$e = \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = 4t + 1 \end{cases} \quad f = \begin{cases} x = 2t + 5 \\ y = -2t + 1 \\ z = 3t + 2 \end{cases}$$

kitérő egyenesek távolságát az alábbi lépésekben.

- Számítsuk ki a két egyenes irányvektorának vektoriális szorzatát.
- Írjuk fel annak az S síknak az egyenletét, amelynek normálvektora a fenti vektoriális szorzat, és amely tartalmazza az e egyenes egy (ezért minden) pontját.
- Számoljuk ki az f egyenes egy pontjának távolságát S -től, amely éppen e és f távolsága.

2024_06_07_v

Adott az

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 5 - 3t \\ z = t - 3 \end{cases}$$

egyenes és a $P = (2, 1, -3)$ pont a térben. Számoljuk ki az egyenes és a pont távolságát az alábbiak szerint. Először írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az egyenesre, és átmegy a P ponton. Határozzuk meg a sík és az egyenes M metszéspontját. (A kapott M pont az egyenesnek a P -hez legközelebbi pontja.) Az M és P távolsága megegyezik az egyenes és P távolságával.

2024_06_14_v

Adott a térben az $5x + 2y - 3z = 7$ egyenletű sík és az

$$\begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = t + 1 \\ z = t - 3 \end{cases}$$

egyenletrendszerű egyenes. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely teljes egészében benne fekszik a síkban, és amely merőlegesen metszi a fenti egyenest. Segítség: a keresett egyenes irányvektora merőleges a sík normálvektorára és az adott egyenes irányvektorára is.

2024_09_30_zh1_A

(2+2+2 pont) Tekintsük az

$$e = \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -2t + 5 \\ z = t - 5 \end{cases} \quad f = \begin{cases} x = 2t + 7 \\ y = 4t + 5 \\ z = -3t - 6 \end{cases}$$

egyeneseket a térben.

- (a) Számítsuk ki a két egyenes metszéspontját.
- (b) Számljuk ki a két egyenes irányvektorának vektoriális szorzatát.
- (c) Írjuk fel a két egyenest tartalmazó sík egyenletét.

2024_09_30_zh1_B

(2+2+2 pont) Tekintsük az

$$e = \begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = -2t + 4 \\ z = -4t + 6 \end{cases} \quad f = \begin{cases} x = t - 1 \\ y = 3t - 4 \\ z = -2t + 6 \end{cases}$$

egyeneseket a térben.

- (a) Számítsuk ki a két egyenes metszéspontját.
- (b) Számljuk ki a két egyenes irányvektorának vektoriális szorzatát.
- (c) Írjuk fel a két egyenest tartalmazó sík egyenletét.

2024_12_09_pzh1

(2+2+2 pont) Adott az

$$\begin{cases} x = 3t + 11 \\ y = -2t - 3 \\ z = 4t + 9 \end{cases}$$

egyenletrendszerű e egyenes és az $5x - y + 2z = 26$ egyenletű S sík.

- (a) Határozzuk meg az e egyenes és az S sík metszéspontját.
- (b) Számítsuk ki az e egyenes irányvektorának és az S sík normálvektorának vektoriális szorzatát.
- (c) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely tartalmazza az e egyenest és merőleges az S síkra.

2025_01_17_v

(5 pont) Adottak az

$$e = \begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = 5 - 2t \\ z = t - 1 \end{cases} \quad f = \begin{cases} x = t - 3 \\ y = 5t + 2 \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

egyenesekek a térben. Írjuk fel az e egyenest tartalmazó és f -vel párhuzamos sík egyenletét. Van-e az e és f egyeneseknek metszéspontja?**2025_10_06_zh1_A**

(2+2+2 pont) Tekintsük az

$$\begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = -2 + 3t, \\ z = 4 + t \end{cases}$$

egyenest és a $3x + 5y - 2z = 7$ egyenletű síkot a térben.

- (a) Számítsuk ki az egyenes és a sík metszéspontját.
- (b) Számljuk ki az egyenes irányvektorának és a sík normálvektorának vektoriális szorzatát.
- (c) Írjuk fel annak az egyenesnek a paraméteres egyenletrendszerét, amely merőleges a fenti egyenesre és benne van az adott síkban.

2025_10_06_zh1_B

(2+2+2 pont) Tekintsük az

$$\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 1 + t, \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

egyenest és a $3x + 2y - z = 11$ egyenletű síkot a térben.

- (a) Számítsuk ki az egyenes és a sík metszéspontját.
- (b) Számoljuk ki az egyenes irányvektorának és a sík normálvektorának vektoriális szorzatát.
- (c) Írjuk fel annak az egyenesnek a paraméteres egyenletrendszerét, amely merőleges a fenti egyenesre és benne van az adott síkban.

2026_03_20_zh1

(2+2+2 pont) Tekintsük az

$$\begin{cases} x = 3t - 4, \\ y = -2t + 3, \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

egyenest és a $Q = (-2, 1, 2)$ pontot a térben.

- (a) Válasszuk ki az egyenes egy P pontját majd írjuk fel a $\overrightarrow{PQ}$ vektort.
- (b) Számoljuk ki az egyenes irányvektorának és a $\overrightarrow{PQ}$ vektornak a vektoriális szorzatát.
- (c) Írjuk fel a fenti egyenest és a Q pontot tartalmazó sík egyenletét.

2026_06_09_v

(5 pont) Adottak a térben az

$$\begin{cases} x = 3t - 4 \\ y = 3 - 2t \\ z = t + 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 3t + 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

egyenesek. Határozzuk meg a két egyenes távolságát az alábbiak szerint. Számoljuk ki a két egyenes irányvektorának vektoriális szorzatát, az eredményt jelölje $\underline{v}$. Válasszunk egy-egy pontot a két egyenesről, P -t és Q -t. A két egyenes távolsága egyenlő a $\overrightarrow{PQ}$ vektor $\underline{v}$ -vel párhuzamos komponensének hosszával.

2026_06_25_v(5 pont) Az $\mathbb{R}^3$ térben adott az

$$\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 2 - 2t \\ z = 3t + 5 \end{cases}$$

egyenletrendszerű e egyenes. Írjuk fel annak az S síknak az egyenletét, amely merőleges az e egyenesre és átmegy a $P = (7, -3, 1)$ ponton. Keressük meg az S sík és az e egyenes Q metszéspontját majd számoljuk ki a P és Q pontok távolságát.

6.2. Feladatok: síkok egyenletei**2019_03_06_zh1**

(2+2+2 pont) Tekintsük a térben a $3x + 2y + 3z = 1$ és $-x + 2y - 2z = 6$ egyenletekkel adott két síkot.

- (a) Számítsuk ki a két sík normálvektorának vektoriális szorzatát.
- (b) Határozzuk meg a két sík azon metszéspontját, amelynek x koordinátája 0.
- (c) A fentiek segítségével írjuk fel a két sík metszésvonalának paraméteres egyenletrendszerét.

2019_05_20_pzh

(2+2+2 pont) Adott a térben két vektor

$$\underline{n}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \underline{n}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

és a $P(5, -2, 3)$ pont.

- (a) Írjuk fel annak a két síknak az egyenletét, amelyek normálvektora $\underline{n}_1$ ill. $\underline{n}_2$ és amelyek átmennek a P ponton.
- (b) Számítsuk ki a két normálvektor vektoriális szorzatát.
- (c) Az előbbiek segítségével írjuk fel a két sík metszésvonalának paraméteres egyenletrendszerét.

2019_05_28_v

Tekintsük a térben a $P = (5, -4, 4)$ pontot és az $x - 2y + 2z = 3$ síkot. Számoljuk ki a távolságukat kétféleképpen.

- (a) Válasszuk ki a sík egy tetszőleges (x_0, y_0, z_0) pontját. Írjuk fel a P pontból az (x_0, y_0, z_0) pontba mutató vektort, majd számoljuk ki a kapott vektornak a sík normálvektorával párhuzamos komponensét. (A merőleges komponensre nincs szükség.) A párhuzamos komponens hossza P és a sík távolsága.
- (b) Használjuk a képletgyűjteményben szereplő formulát a pont és sík távolságára, amelyben szintén kiválasztjuk a sík egy (x_0, y_0, z_0) pontját. Vegyük észre, hogy a formulába behelyettesítéssel ugyanazt a számolást végezzük el, mint a feladat első részében.

2020_10_19_zh1_A

(2+2+1 pont) Tekintsük a térben a $2x - 3y + 4z + 11 = 0$ és $x + 3y - z - 5 = 0$ egyenletekkel adott két síkot.

- (a) Számítsuk ki a két sík normálvektorának vektoriális szorzatát.
- (b) Határozzuk meg a két sík azon metszéspontját, amelynek x koordinátája 0.
- (c) A fentiek segítségével írjuk fel a két sík metszésvonalának paraméteres egyenletrendszerét.

2020_10_19_zh1_B

(2+2+1 pont) Tekintsük a térben a $4x - 3y + 2z + 10 = 0$ és $-x + 3y + z - 7 = 0$ egyenletekkel adott két síkot.

- (a) Számítsuk ki a két sík normálvektorának vektoriális szorzatát.
- (b) Határozzuk meg a két sík azon metszéspontját, amelynek z koordinátája 0.
- (c) A fentiek segítségével írjuk fel a két sík metszésvonalának paraméteres egyenletrendszerét.

2020_10_19_zh1_C

(2+2+1 pont) Tekintsük a térben a $4x + 2y - 3z + 4 = 0$ és $-x + y + 3z - 4 = 0$ egyenletekkel adott két síkot.

- (a) Számítsuk ki a két sík normálvektorának vektoriális szorzatát.
- (b) Határozzuk meg a két sík azon metszéspontját, amelynek z koordinátája 0.
- (c) A fentiek segítségével írjuk fel a két sík metszésvonalának paraméteres egyenletrendszerét.

2020_10_19_zh1_D

(2+2+1 pont) Tekintsük a térben a $-3x + 2y + 4z + 2 = 0$ és $3x + y - z - 5 = 0$ egyenletekkel adott két síkot.

- (a) Számítsuk ki a két sík normálvektorának vektoriális szorzatát.

- (b) Határozzuk meg a két sík azon metszéspontját, amelynek x koordinátája 0.
 (c) A fentiek segítségével írjuk fel a két sík metszészvonalának paraméteres egyenletrendszerét.

2022_03_24_zh1_A

(2+2+2 pont) Adott a térben a $2x + y = z + 8$ egyenletű S sík és rajta az $A = (2, 5, 1)$ és $B = (5, 4, 6)$ pontok.

- (a) Írjuk fel az A és B pontokon átmenő egyenes paraméteres egyenletrendszerét.
 (b) Számítsuk ki az $\overrightarrow{AB}$ vektor és az S sík normálvektorának vektoriális szorzatát.
 (c) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges S -re és amely átmegy az A és B pontokon.

2022_03_24_zh1_B

(2+2+2 pont) Adott a térben a $z = x - 2y + 8$ egyenletű S sík és rajta az $A = (1, 2, 5)$ és $B = (6, 5, 4)$ pontok.

- (a) Írjuk fel az A és B pontokon átmenő egyenes paraméteres egyenletrendszerét.
 (b) Számítsuk ki az $\overrightarrow{AB}$ vektor és az S sík normálvektorának vektoriális szorzatát.
 (c) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges S -re és amely átmegy az A és B pontokon.

2022_05_23_pzh

(2+2+1 pont) Adottak a térben az $A = (1, -2, 3)$, $B = (4, 2, 0)$ és $C = (3, -4, 4)$ pontok.

- (a) Írjuk fel az A és B pontokon átmenő egyenes paraméteres egyenletrendszerét.
 (b) Számítsuk ki az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektoriális szorzatát.
 (c) Az előző feladat eredményének felhasználásával írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az A , B és C pontokon.

2023_10_04_zh1_A

(2+2+2 pont) Adottak a térben az $A = (-1, 3, 2)$, $B = (3, 2, 4)$ és $C = (2, 4, 3)$ pontok.

- (a) Határozzuk meg az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok vektoriális szorzatát.
 (b) Írjuk fel az A , B és C pontokat tartalmazó sík egyenletét.
 (c) A $D = (6, 3, z_D)$ pont z_D milyen értéke esetén esik a fenti síkba?

2023_10_04_zh1_B

(2+2+2 pont) Adottak a térben az $A = (-2, 1, 3)$, $B = (0, 5, 2)$ és $C = (-1, 4, 4)$ pontok.

- (a) Határozzuk meg az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok vektoriális szorzatát.
 (b) Írjuk fel az A , B és C pontokat tartalmazó sík egyenletét.
 (c) A $D = (1, 8, z_D)$ pont z_D milyen értéke esetén esik a fenti síkba?

2023_12_20_v

Adottak a térben a $3x + 4y - 2z = 6$ és $x - 2y + 3z = 3$ egyenletű síkok. Számoljuk ki a két sík azon metszéspontját, amelynek x koordinátája 0. Ezen metszéspont segítségével írjuk fel a két sík metszészvonalának paraméteres egyenletrendszerét.

2024_05_27_pzh

(2+2+2 pont) Tekintsük a $2x - y + 5z = -3$ és $4x + 3y + z = 19$ egyenletű síkokat.

- (a) Keressük meg a két sík azon metszéspontját, amelynek z koordinátája 0.
- (b) Számítsuk ki a két sík normálvektorának vektoriális szorzatát.
- (c) A fentiek segítségével írjuk fel a két sík metszészvonalának paraméteres egyenletrendszerét.

2024_06_28_v

Adottak a térben az $A = (2, -2, 3)$, $B = (4, 0, 0)$, $C = (3, -3, 5)$ pontok.

- (a) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely mindhárom pontot tartalmazza.
- (b) Keressük meg azt a D pontot, amellyel az $ABDC$ négyszög paralelogramma, és amelyben a csúcsok a négyszög kerülete mentén ilyen sorrendben következnek.

2024_12_16_v

(5 pont) Mennyi a $3x + 2y - z = 3$ sík és az $Q = (7, 4, -4)$ pont távolsága?

2025_01_10_v

(5 pont) Írjuk fel a térben az $A = (0, 0, 4)$, $B = (1, 0, 8)$, $C = (6, 3, 1)$ pontok által meghatározott sík egyenletét.

2025_12_15_pzh

(2+2+2 pont) Tekintsük a $3x - 2y + 5z = 5$ és $2x + y - 3z = 6$ egyenletű síkokat.

- (a) Keressük meg a két sík azon metszéspontját, amelynek x koordinátája 2.
- (b) Számítsuk ki a két sík normálvektorának vektoriális szorzatát.
- (c) A fentiek segítségével írjuk fel a két sík metszészvonalának paraméteres egyenletrendszerét.

2026_01_30_v

(5 pont) Számoljuk ki a $3x - 8y + 5z = 12$ és $x - 2y + 3z = 4$ síkok metszészvonalát a következőképpen. Oldjuk meg a két sík egyenletéből álló lineáris egyenletrendszert, és egy $t \in \mathbb{R}$ paraméter segítségével fejezzük ki a kapott megoldások x, y, z koordinátáit. Ez adja a metszészvonal paraméteres egyenletrendszerét.

Végül skaláris szorzással ellenőrizzük a metszészvonal merőlegességét a síkok normálvektoraira.

2026_06_01_v

(5 pont) Adottak a térben a $3x + 4y - 2z = 6$ és $x - 2y + 3z = 3$ egyenletű síkok. Számoljuk ki a két sík azon metszéspontját, amelynek x koordinátája 0. Határozzuk meg a két sík metszészvonalának irányvektorát, majd a kiszámolt metszéspont segítségével írjuk fel a metszészvonal paraméteres egyenletrendszerét.

2026_06_17_v

(5 pont) Adottak a térben a $P(3, -2, 4)$ és $Q(5, 1, 1)$ pontok. Írjuk fel annak az S síknak az egyenletét, amely átmegy a Q ponton és merőleges a P és Q pontok egyenesére. Írjuk fel annak az e egyenesnek a paraméteres egyenletrendszerét, amely átmegy a P ponton és $(1, 1, 1)$ irányú. Számoljuk ki S és e metszéspontját.

6.3. Elméleti kérdések**2021_01_22_v_A**

- (a) Az $\mathbb{R}^3$ térben milyen lehet két sík kölcsönös helyzete? Minden lehetséges esetben adjuk meg, hogy a két sík egyenletéből alkotott lineáris egyenletrendszernek hány megoldása van.
- (b) Határozzuk meg a $2x - 3y + z = 5$ és $-4x + 6y - 2z = 0$ síkok kölcsönös helyzetét, és vizsgáljuk meg, hány megoldása van a megfelelő egyenletrendszernek. Az egyenletrendszer megoldást nem kell felírni.

2021_01_22_v_B

- (a) Az $\mathbb{R}^3$ térben milyen lehet két sík kölcsönös helyzete? Minden lehetséges esetben adjuk meg, hogy a két sík egyenletéből alkotott lineáris egyenletrendszernek hány megoldása van.
- (b) Határozzuk meg a $x + 2y - 2z = 3$ és $-2x - 4y + 4z + 6 = 0$ síkok kölcsönös helyzetét, és vizsgáljuk meg, hány megoldása van a megfelelő egyenletrendszernek. Az egyenletrendszer megoldást nem kell felírni.

2024_06_07_v

- (a) Tekintsük adottnak az $\mathbb{R}^3$ térben a $\underline{v}$ vektort és az origón átmenő S sík egyenletét. Hogyan állítható elő $\underline{v}$ az S síkba eső és rá merőleges komponensek összegeként? Segítség: mi az S sík normálvektorának viszonya a keresett komponensekkel?
- (b) Mik a keresett komponensek a $\underline{v} = (5, 4, 9)$ vektor és $2x - y + 4z = 0$ sík esetén?

7. Sorozatok határértéke**7.1. Feladatok: leggyorsabban növekvő tagból számolt határérték****2019_04_24_zh2**

(3 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \frac{\sqrt{3n - 0,6^n}}{5 - n}$$

sorozat határértékét.

2019_05_20_pzh

(4 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \frac{(5n^5 + 7n^7) \cdot 3n^3}{9n^9 + 10n^{10} - 11n^{-11}}$$

sorozat határértékét.

2019_06_21_v

Mennyi az

$$a_n = \frac{3n^4 + 4^{n-3}}{4 \cdot 3^n - 3n^{3/4}} - \frac{3n^4 + 4^{n-3}}{2 \cdot 4^{n-2}}$$

sorozat határértéke?

2020_11_16_zh2_A

(5 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \frac{3n^2 - 8n + 6 \cdot 2^{-n}}{2n(4 - 3n)}$$

sorozat határértékét.

2020_11_16_zh2_B

(5 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \frac{3n(n+1)(n-1)}{5n + 2 \cdot 0,5^n - 4n^3}$$

sorozat határértékét.

2020_11_16_zh2_C

(5 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \frac{3^{-n-1} + 3n^3}{n^2(2n-3)}$$

sorozat határértékét.

2020_11_16_zh2_D

(5 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \frac{(n^2 + 1)(n + 1)}{n^2 + \frac{3}{2^n} + 8n^3}$$

sorozat határértékét.

2021_01_08_v_A

Számoljuk ki az

$$a_n = \frac{2021n + n^{2021} + 2021^{1-n}}{n(2020 - n^{2020} + 2020^{-n})}$$

sorozat határértékét.

2021_01_08_v_B

Számoljuk ki az

$$a_n = \frac{2020n + 2021n^{2020} + 2020^{-n}}{2021 + n^{2021} + 2021^{-2n}}$$

sorozat határértékét.

2022_05_05_zh2_A

(4 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \frac{(n^2 - 4^{-n/2})(1 - 3n)}{2n^3 + 7}$$

sorozat határértékét.

2022_05_05_zh2_B

(4 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \frac{(2^{-2n} - n^2)(2n + 1)}{5 + 3n^3}$$

sorozat határértékét.

2022_06_27_v

Mennyi az

$$a_n = \frac{5n^2 - 2 \cdot 3^{n-1} + 3 \cdot 5^{1-n}}{3^{n+1} + (n+1)^3}$$

sorozat határértéke?

2023_12_11_pzh2_A

(4 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \frac{(n^2 - 3^{n+1})(5n^8 + 4^{n/2})}{6^{n+2} - 11n^3 + 2^{-2n+3}}$$

sorozat határértékét.

2023_12_11_pzh2_B

(4 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \frac{3^{5-n} + 8^{n+1} + 5n^6}{(n^3 - 2^{n-1})(2^{2n+3} - 7n^7)}$$

sorozat határértékét.

2024_01_26_v

Mennyi az

$$a_n = \frac{(3n^7 - 5 \cdot 2^{n+3})(2^{3-n} + 2^{n-3})}{2^{n+1} - 3^n + 4^{n-1}}$$

sorozat határértéke?

2024_05_03_zh2

(4 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \frac{3n - 8 \cdot e^{1-2n} + n^3/10}{3/2^{n+1} + 10/n^{-3} - 7n}$$

sorozat határértékét.

2024_05_27_pzh

(4 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \frac{2^{n+3} - n^5 + 3 \cdot e^{n-1}}{7n^8 - e^n + 5^{2-3n}}$$

sorozat határértékét.

2024_06_14_v

Mennyi az

$$a_n = \frac{1^{3n-2} + 3^{2-n} - 4^{n-3}}{2^{3-n}(11n^3 - 3^n) + 2^{2n+1} - 5n^9}$$

sorozat határértéke?

2024_12_09_pzh2_A

(4 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \frac{2^{3n-2} + 3n^2}{3^{2n-3} + 2n^3}$$

sorozat határértékét.

2024_12_09_pzh2_B

(4 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \frac{3^{3n-2} + 3n^3}{2^{2n-3} + 2n^2}$$

sorozat határértékét.

2025_11_26_zh2_A

(4 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \frac{5^{2-n} + n^6(2n - 3n^3) - 2^{2n+1}}{7n^5 + 3^{n-2} - 6n^4}$$

sorozat határértékét.

2025_11_26_zh2_B

(4 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \frac{2 \cdot 3^{n+2} + 2^{1-2n} - n^3(4 - 5n)}{3n^8 - 5^{n-2} + 4n^2}$$

sorozat határértékét.

2026_01_30_v

(5 pont) Mennyi az

$$a_n = \frac{n(2n-5)^3 - 6n^3 + 4n - 1}{2n^2 + 1 + (1 + 3n^2)(1 - 3n^2)}$$

sorozat határértéke?

2026_05_08_zh2

(4 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \frac{3n(n+1)(n-1)}{5n + 2 \cdot 0,5^n - 4n^3}$$

sorozat határértékét.

2026_06_01_pzh2

(4 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{6n^3 + 4n + 3 \cdot 0,7^n}$$

sorozat határértékét.

2026_06_17_v

(5 pont) Mennyi az

$$a_n = \frac{2^{2n-3}(4 \cdot 0,99^n - 7)}{5n^2 + 3^{n+2} - 6n^5}$$

sorozat határértéke?

7.2. Feladatok: határérték az exponenciálisban**2019_06_04_v**

Mennyi az

$$a_n = \left(\frac{n+2}{n-1} \right)^{3-2n}$$

sorozat határértéke?

2020_12_14_pzh2_A

(5 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \left(\frac{(2n+1)n}{n^2-5} \right)^n$$

sorozat határértékét.

2020_12_14_pzh2_B

(5 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \left(\frac{3n(n-3)}{(2n)^2} \right)^n$$

sorozat határértékét.

2020_12_14_pzh2_C

(5 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \left(\frac{(2n+3)n}{2n^2-1} \right)^n$$

sorozat határértékét.

2021_01_22_v_A

Mennyi az

$$a_n = \left(\frac{3-8n+n^2}{5n+2n^2+1} \right)^{3n-4}$$

sorozat határértéke?

2021_01_22_v_B

Mennyi az

$$a_n = \left(\frac{5+3n-2n^2}{4-n^2} \right)^{n+5}$$

sorozat határértéke?

2021_01_22_v_C

Mennyi az

$$a_n = \left(\frac{1+3n+n^2}{n^2-4} \right)^{1-n}$$

sorozat határértéke?

2022_05_23_pzh

(5 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \left(1 + \frac{3}{8+n} \right)^{\frac{n-1}{2}}$$

sorozat határértékét.

2022_06_03_v

Mennyi az

$$a_n = \left(\frac{3(n-1)-n}{2n+1} \right)^{3-5n}$$

sorozat határértéke?

2023_11_15_zh2_A

(4 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \left(\frac{(2n^2-3n-1)(n+1)}{n(n-1)(n-2)} \right)^n$$

sorozat határértékét.

2023_11_15_zh2_B

(4 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \left(\frac{(1-4n+n^2)(n-1)}{n(3n+1)(n+2)} \right)^n$$

sorozat határértékét.

2023_12_20_v

Mennyi az

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^{2n^2-3n}$$

sorozat határértéke?

2024_06_07_v

Mennyi az

$$a_n = \left(\frac{n(n+2)}{(n-1)^2}\right)^{1-2n^2}$$

sorozat határértéke?

2024_11_13_zh2_A

(4 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \left(\frac{5+3n}{3(n+1)}\right)^{4-2n}$$

sorozat határértékét.

2024_11_13_zh2_B

(4 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \left(\frac{1+2n}{2(n+2)}\right)^{5-3n}$$

sorozat határértékét.

2025_01_10_v

(5 pont) Mennyi az

$$a_n = \left(\frac{(n+3)(n-1)-n^2}{3n-5}\right)^{3-2n}$$

sorozat határértéke?

2025_01_24_v

(5 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \left(\frac{(2n-1)(n+3)-2n^2}{n^2-(n-1)(n-4)}\right)^n$$

sorozat határértékét.

2025_12_15_pzh_A

(4 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \left(\frac{n-2}{1+n}\right)^{5-2n}$$

sorozat határértékét.

2025_12_15_pzh_B

(4 pont) Számítsuk ki az

$$a_n = \left(\frac{2+n}{n-1}\right)^{4-3n}$$

sorozat határértékét.

2026_01_09_v

(5 pont) Mennyi az

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right)^{3n^2+5n-7}$$

sorozat határértéke?

2026_06_09_v

(5 pont) Mennyi az

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n+2} - \frac{3}{n-1} \right)^{5n+4}$$

sorozat határértéke?

2026_06_25_v

(5 pont) Mennyi az

$$a_n = \left(\frac{n^2 - 4n + 1}{n^2 + 3n - 2} \right)^{3-2n}$$

sorozat határértéke?

7.3. Elméleti kérdések**2019_05_28_v**

(a) Igaz-e, hogy minden korlátos sorozat konvergens? Írjuk le az előző állításban szereplő két fogalom (korlátos, konvergens) definícióját.

(b) A fenti két fogalom (korlátos, konvergens) közül melyek teljesülnek az

$$a_n = \frac{1}{2n+1} \quad b_n = \frac{n-n^2}{n+1} \quad c_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$$

sorozatok esetén?

2020_12_21_v_A

Állapítsuk meg az

$$a_n = \frac{2n+1}{n-1}$$

sorozat határértékét, és a konvergens sorozat definíciója alapján keressük meg az $\varepsilon = 0,1$ értékhez tartozó küszöbindexet.**2020_12_21_v_B**

Állapítsuk meg az

$$a_n = \frac{n-1}{3n+6}$$

sorozat határértékét, és a konvergens sorozat definíciója alapján keressük meg az $\varepsilon = 0,1$ értékhez tartozó küszöbindexet.**2020_12_21_v_C**

Állapítsuk meg az

$$a_n = \frac{n-5}{2n+2}$$

sorozat határértékét, és a konvergens sorozat definíciója alapján keressük meg az $\varepsilon = 0,1$ értékhez tartozó küszöbindexet.

2021_01_15_v_A

Legyen

$$a_n = \frac{n^2 \sin(2n+1)}{2^n}.$$

A sorozatokra vonatkozó rendőrelv alapján mutassuk meg, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Segítség: a $-1 \leq \sin x \leq 1$ egyenlőtlenség segítségével adjunk alsó és felső becslést a_n -re, majd mutassuk meg, hogy mindkét becslés 0-hoz tart.

2021_01_15_v_B

Legyen

$$a_n = \frac{n^3 \cos(1-3n)}{3^n}.$$

A sorozatokra vonatkozó rendőrelv alapján mutassuk meg, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Segítség: a $-1 \leq \cos x \leq 1$ egyenlőtlenség segítségével adjunk alsó és felső becslést a_n -re, majd mutassuk meg, hogy mindkét becslés 0-hoz tart.

2022_06_15_v

- (a) Írjuk le, mit jelent, hogy az a_n sorozat felülről korlátos, monoton növekvő, ill. konvergens?
- (b) Válaszoljunk az alábbi kérdésekre rövid indoklással (esetleg tanult állításokra hivatkozva) vagy ellenpéldával. Van-e olyan sorozat, amely felülről korlátos, monoton növekvő, de nem konvergens? Van-e olyan sorozat, amely monoton növekvő, konvergens, de nem felülről korlátos? Van-e olyan sorozat, amely felülről korlátos, konvergens, de nem monoton növekvő?

2024_01_12_v

- (a) Mikor mondjuk, hogy az a_n sorozat határértéke az $A \in \mathbb{R}$ valós szám?
- (b) Mennyi az

$$a_n = \frac{2n^2 - 5}{n^2 + 1}$$

sorozat határértéke? A fenti definíció alapján keressük meg az $\varepsilon = 0,1$ -hez tartozó legkisebb küszöbindexet.

2024_01_19_v

- (a) Mondjuk ki a sorozatokra vonatkozó rendőrelvet.
- (b) Számítsuk ki az

$$a_n = \frac{2n \cdot \sin(3n)}{5n^2 - 4n}$$

sorozat határértékét a rendőrelv felhasználásával.

Segítség: a $-1 \leq \sin x \leq 1$ egyenlőtlenség alapján adjunk alsó és felső becslést a sorozatra.

2024_06_28_v

- (a) Mit jelent, hogy az a_n sorozatnak az $A \in \mathbb{R}$ szám a határértéke?
- (b) Számoljuk ki az

$$a_n = \frac{2n+3}{n-1}$$

sorozat határértékét, majd a határérték definíciója alapján adjunk meg egy $\varepsilon = 0,1$ értékhez tartozó küszöbindexet.

2024_12_16_v

- (a) (3 pont) Mit jelent az, hogy az a_n sorozat határértéke egy A valós szám?
- (b) (3 pont) Számoljuk ki az

$$a_n = \frac{3n-1}{2n+3}$$

sorozat határértékét, majd a határérték definíciója alapján adjunk meg egy $\varepsilon = \frac{1}{10}$ értékhez tartozó küszöbindexet.

2025_01_17_v

- (a) (3 pont) Egy valós számsorozat esetén értelmezzük a monoton, korlátos és konvergens fogalmakat. (Adjuk meg a határérték definícióját is.)
- (b) (3 pont) Ha van, adjunk példát olyan sorozatra, amely
- A monoton és korlátos, de nem konvergens;
 - B monoton és konvergens, de nem korlátos;
 - C korlátos és konvergens, de nem monoton.
- Ha nincs ilyen sorozat, röviden indokoljuk.

2026_06_01_v

- (a) (3 pont) Definíáljuk az a_n valós számsorozat véges határértékét.
- (b) (3 pont) Számoljuk ki az

$$a_n = \frac{n-2}{3n+1}$$

sorozat határértékét, majd keressük meg az $\varepsilon = 0,1$ értékhez tartozó küszöbindexet.

8. Függvények határértéke, folytonosság**8.1. Feladatok: határérték kiszámolása****2020_12_14_pzh2_A**

(5 pont) Számoljuk ki a

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt[3]{2+x}}{1+x}$$

függvényhatárértéket.

2020_12_14_pzh2_B

(5 pont) Számoljuk ki a

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x^2 - 1}$$

függvényhatárértéket.

2020_12_14_pzh2_C

(5 pont) Számoljuk ki a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}{x}$$

függvényhatárértéket.

8.2. Feladatok: paramétertől függő folytonosság**2019_04_24_zh2**

(4 pont) Az a és b valós paraméterek mely értékére lesz az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{2x} & \text{ha } x < 0 \\ ax + b & \text{ha } 0 \leq x \leq 1/2 \\ \frac{\sin(\pi x)}{2x} & \text{ha } x > 1/2 \end{cases}$$

függvény folytonos?

2019_05_20_pzh

(4 pont) Az a valós paraméter mely értékére lesz az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log_2(1+2x)}{3x} & \text{ha } x > 0 \\ a + x & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

függvény folytonos?

2020_11_16_zh2_A

(5 pont) A p valós paraméter mely értékére lesz az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-\pi/2)}{2x-\pi} & \text{ha } x > \pi/2 \\ \frac{p}{x-\pi} & \text{ha } x \leq \pi/2 \end{cases}$$

függvény mindenhol folytonos?

2020_11_16_zh2_B

(5 pont) A p valós paraméter mely értékére lesz az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{3x-3} & \text{ha } x > 1 \\ px^2 - 1 & \text{ha } x \leq 1 \end{cases}$$

függvény mindenhol folytonos?

2020_11_16_zh2_C

(5 pont) A p valós paraméter mely értékére lesz az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)}{\sqrt{x}} & \text{ha } x > 0 \\ 1 - p(x-1)^2 & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

függvény mindenhol folytonos?

2021_01_15_v_A

Az $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek mely értékeire folytonos az

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{3x^2 - 2x\sqrt{x} + 5x}{2x - x^3} & \text{ha } x \in (0, 1) \\ bx + 1 & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$$

függvény?

2021_01_15_v_B

Az $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek mely értékeire folytonos az

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{x\sqrt[3]{x} + x + 2x^3}{2x - x^2} & \text{ha } x \in (0, 1) \\ bx + 1 & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$$

függvény?

2021_01_15_v_C

Az $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek mely értékeire folytonos az

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{2x^3 + 3x + 4x\sqrt{x}}{2x + x^3} & \text{ha } x \in (0, 1) \\ bx + 1 & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$$

függvény?

2022_05_05_zh2_A

(5 pont) A p valós paraméter mely értékére lesz az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} & \text{ha } x > 0 \\ p - (1-x)^2 & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

függvény mindenhol folytonos?

2022_05_05_zh2_B

(5 pont) A p valós paraméter mely értékére lesz az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x} & \text{ha } x > 0 \\ (x+1)^2 + p & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

függvény mindenhol folytonos?

2022_05_23_pzh

(5 pont) Az a valós paraméter mely értékére lesz az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{x^2-3x} & \text{ha } x \in (0, 1/2] \\ a - 2^{x+1} & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

függvény folytonos az $x_0 = 0$ pontban?

2022_06_15_v

Az $a \in \mathbb{R}$ paraméter mely értéke mellett folytonos az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{(2+x)^3}-2^{3/2}}{3x} & \text{ha } x > 0 \\ a - \log_2(1-x) & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

függvény?

2023_11_15_zh2_A

(5 pont) A p valós paraméter mely értékére lesz az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x^{-1}} & \text{ha } x > 1 \\ px^2 + 1 & \text{ha } x \leq 1 \end{cases}$$

függvény mindenhol folytonos?

2023_11_15_zh2_B

(5 pont) A p valós paraméter mely értékére lesz az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{8 \cdot 2^{3x}-1}{x+1} & \text{ha } x > -1 \\ px & \text{ha } x \leq -1 \end{cases}$$

függvény mindenhol folytonos?

2024_01_19_v

Az $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek mely értékeire lesz az

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{ha } x \leq -1 \\ \frac{\sin(\frac{\pi}{4}(x+1)) + (x+1)^2}{x^2 + b} & \text{ha } -1 < x < 1 \\ x^2 + b & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$$

függvény minden x -re folytonos?

2024_05_03_zh2

(5 pont) A p valós paraméter mely értékére lesz az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(2x-1)}{3x-3} & \text{ha } x > 1 \\ px^2 + 1 & \text{ha } x \leq 1 \end{cases}$$

függvény mindenhol folytonos?

2024_05_27_pzh

(5 pont) A p valós paraméter mely értékére lesz az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2^x-2}{x-1} & \text{ha } x > 1 \\ px & \text{ha } x \leq 1 \end{cases}$$

függvény mindenhol folytonos?

2024_11_13_zh2_A

(5 pont) A p valós paraméter mely értékére lesz az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{7^{x+1}-7}{3^x} & \text{ha } x > 0 \\ 2x^2 - 3x + 5p & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

függvény mindenhol folytonos?

2024_11_13_zh2_B

(5 pont) A p valós paraméter mely értékére lesz az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-5^x}{x+x^2} & \text{ha } x > 0 \\ 5x^2 - 2x + 3p & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

függvény mindenhol folytonos?

2024_12_09_pzh2_A

(5 pont) A p valós paraméter mely értékére lesz az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3^x-3}{\sqrt{x}-1} & \text{ha } x > 1 \\ px^2 & \text{ha } x \leq 1 \end{cases}$$

függvény mindenhol folytonos?

2024_12_09_pzh2_B

(5 pont) A p valós paraméter mely értékére lesz az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{2^{x-2}} & \text{ha } x > 1 \\ px^2 & \text{ha } x \leq 1 \end{cases}$$

függvény mindenhol folytonos?

2025_01_17_v

(5 pont) Adjuk meg a $p \in \mathbb{R}$ valós paraméter értékét úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(5x)}{7x^2} & \text{ha } x > 0 \\ 2 + p(x+1)^2 & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

függvény folytonos legyen minden $x \in \mathbb{R}$ -re.

2025_12_15_pzh_A

(5 pont) A p valós paraméter mely értékére lesz az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(2x-1)}{\sin(3x-3)} & \text{ha } x > 1 \\ 1 - px^2 & \text{ha } x \leq 1 \end{cases}$$

függvény mindenhol folytonos?

2025_12_15_pzh_B

(5 pont) A p valós paraméter mely értékére lesz az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3^x-3}{\ln(2x-1)} & \text{ha } x > 1 \\ 1 - px^2 & \text{ha } x \leq 1 \end{cases}$$

függvény mindenhol folytonos?

2026_05_08_zh2

(5 pont) Az a valós paraméter mely értékére lesz az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^3-1}{2x} & \text{ha } x > 0 \\ a & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

függvény folytonos?

2026_06_01_pzh2

(5 pont) Az a valós paraméter mely értékére lesz az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(2-3x)-\ln 2}{x} & \text{ha } x > 0 \\ a & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

függvény folytonos?

2026_06_01_v

(5 pont) Az $a, b \in \mathbb{R}$ valós paraméterek mely értékeire lesz folytonos az

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{\ln(1+2x)}{x^2+3x} & \text{ha } x \in (0, 1) \\ b & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$$

függvény?

8.3. Elméleti kérdések

2021_01_08_v

Az alábbi kérdésekre adott igenlő választ indokoljuk (tanult állításokra hivatkozva), nemleges válasz esetén adjunk ellenpéldát.

- (a) Tegyük fel, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ függvények folytonosak az x_0 pontban. Következik-e ebből, hogy az $f(x) + g(x)$ függvény is folytonos x_0 -ban?
- (b) Tegyük fel, hogy az $f(x)$ és $f(x) + g(x)$ függvények folytonosak az x_0 pontban. Következik-e ebből, hogy a $g(x)$ függvény is folytonos x_0 -ban?
- (c) Tegyük fel, hogy az $f(x) + g(x)$ függvény folytonos az x_0 pontban. Következik-e ebből, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ függvények is folytonosak x_0 -ban?

2021_01_22_v_A

Az alábbi lépésekben mutassuk meg, hogy az $f(x) = \sin(1/x)$ függvénynek nem létezik a határértéke $x_0 = 0$ -ban. Értelmezzük az

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n2\pi}, \quad \tilde{x}_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + n2\pi}$$

sorozatokat. Számoljuk ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n$ sorozat-határértékeket. Számoljuk ki az $f(x_n)$ és $f(\tilde{x}_n)$ függvényértékeket, majd vonjunk le következtetést az $f(x)$ függvény x_0 -beli határértékének létezésére.

2021_01_22_v_B

Az alábbi lépésekben mutassuk meg, hogy az $f(x) = \cos(1/x)$ függvénynek nem létezik a határértéke $x_0 = 0$ -ban. Értelmezzük az

$$x_n = \frac{1}{n2\pi}, \quad \tilde{x}_n = \frac{1}{\pi + n2\pi}$$

sorozatokat. Számoljuk ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n$ sorozat-határértékeket. Számoljuk ki az $f(x_n)$ és $f(\tilde{x}_n)$ függvényértékeket, majd vonjunk le következtetést az $f(x)$ függvény x_0 -beli határértékének létezésére.

2024_06_07_v

- (a) Hogyan értelmezzük egy $f(x)$ függvény folytonosságát egy x_0 pontban?
- (b) Írjuk le a folytonos függvényekkel végzett alpműveletek ill. összetétel segítségével kapott függvény folytonosságára vonatkozó tételt.
- (c) Az $\mathbb{R}$ számegeenes mely pontjaiban folytonos az alábbi két függvény?

$$f(x) = \frac{e^x - 8x^2 + 3}{1 - \cos(\pi x)}, \quad g(x) = \frac{\ln(2x+1) - 2\ln(3-x)}{x^2 - 3x + 2}$$

2025_12_17_v

- (a) (3 pont) Mit jelent az, hogy az $f(x)$ függvény balról ill. jobbról folytonos az x_0 pontban?
- (b) (3 pont) Folytonos-e balról ill. jobbról az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x+\pi/2)}{2x+\pi} & \text{ha } x > -\pi/2 \\ 2x - \pi & \text{ha } x \leq -\pi/2 \end{cases}$$

függvény az $x_0 = -\pi/2$ pontban?

2026_01_23_v

- (a) (3 pont) A sorozatok határértékének segítségével értelmezzük a függvényhatárérték fogalmát, azaz írjuk le a függvényhatárérték sorozatokkal adott definícióját.
- (b) (3 pont) Tekintsük az

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvényt. Az $a_n = 2/(\pi + 4n\pi)$ és $b_n = 2/(3\pi + 4n\pi)$ sorozatok segítségével mutassuk meg, hogy a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ függvényhatárérték nem létezik.

9. Deriválás**9.1. Elméleti kérdések: L'Hospital szabály****2019_05_28_v**

- (a) Mit állít a L'Hospital-szabály? (A szabály egyszeri alkalmazására vonatkozó legegyszerűbb változatot mondjuk ki.)
- (b) Számoljuk ki a segítségével a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{\ln(2x-1)}$$

függvényhatárértéket.

2023_12_20_v

Mondjuk ki a L'Hospital-szabályt. Az alábbi határértékek közül melyik esetekben alkalmazható? Ahol alkalmazható, számítsuk is ki a függvényhatárértéket.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2-2x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2-2x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$$

2024_06_14_v

- (a) Mondjuk ki a L'Hospital-szabályt.
- (b) A L'Hospital-szabály alkalmazásával számoljuk ki a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2}}{x^2}$$

függvényhatárértéket.

2025_01_10_v

- (a) (3 pont) Mondjuk ki a függvények határértékére vonatkozó L'Hospital-szabályt.
- (b) (3 pont) A L'Hospital-szabály alkalmazásával számoljuk ki a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1}{x}$$

határértéket.

2026_06_17_v

(a) (3 pont) Mondjuk ki a L'Hospital-szabályt.

(b) (3 pont) Az alábbiak közül melyik esetben alkalmazható? Számoljuk ki a határértékeket.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x/2)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x/2)}{6 - 3x}$$

10. Érintő egyenes, Taylor-polinom