Hány van belőle?
Ismerkedés a kombinatorikával

Szabó Zsolt

BME, Sztochasztika Tanszék

2025

Kontextus:

Modern számfogalmaink és reprezentációik birtokában látjuk a környezetünket és reagálunk a kihívásaira

Más fajok is látszólag „tudnak a számokról": csimpánzok, varjak

Számok reprezentációi: bennszülöttek számfogalmai, római számok

Fibonacci: Liber Abaci (1202)

Számfogalmak ⟷ Számhalmazok kiterjesztése

Természetes, egész, racionális, valós, komplex számok, kvaterniók, októniók, szedeniók

Számosságok ⟷ végtelen sok elemű halmazok elemeinek a hipotetikus párosítása

- Pl. megszámlálható vs. kontinuum

Kombinatorika: természetes számokkal kifejezett (véges) számosságok közti relációk, törvényszerűségek

- Ha A-ból ennyi és ennyi van, hány van B-ből?

Permutáció

Példa. Egy futóversenyen 10-en indulnak.
Hány kimenetel lehetséges?

- Bárki lehet a győztes → 10 lehetőség
- Rajta kívül bárki lehet a második → 9 lehetőség
- Rajtuk kívül bárki lehet a harmadik → 8 lehetőség, stb.

Hányféleképpen lehet a 10 versenyzőt sorba állítani?

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10! = 3\,628\,800$$

Általánosan: hányféleképpen lehet n elemet sorba állítani?

n elemnek hány **permutációja** van?

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$$ „Faktoriális”

$$n! = n\,(n-1)! \qquad 0! = 1! = 1$$

Kombináció

És ha csak azt nézem, kik a dobogósok, éremtől függetlenül?

$$\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!} = \frac{10!}{3!\,7!} = 120$$

- A versenyzők tetszőlegesen átrendezhetők → $10!$
- A csoportokon (dobogós/nem dobogós) belüli sorrendjük nem számít → osztás $3!$-sal és $7!$-sal

Általánosan: hányféleképpen választhatok ki n elemből k darabot?

Binomiális együtthatók: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ „n alatt a k"

Szimmetria:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \binom{n}{k}, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Ismétléses kombináció

Egy elem többször is kiválasztható, de összesen k választás

Példa. Hányféleképpen adhatunk 7 almát 5 gyereknek?

- 5 gyerek $\leftrightarrow$ 5 „rekesz", összesen 7 almával
- 5 rekesz 4 „válaszfallal" elválasztva

7 alma és 4 válaszfal tetszőleges sorrendben

o | o o | o | o o | o

$$\binom{4+7}{4} = \frac{11!}{4!\,7!} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{4\cdot 3\cdot 2} = 330$$

Általánosan: hányféleképpen tehetek k elemet m rekeszbe?

$\binom{m-1+k}{k}$, $\quad m-1$ a válaszfalak száma

Útvonalak száma

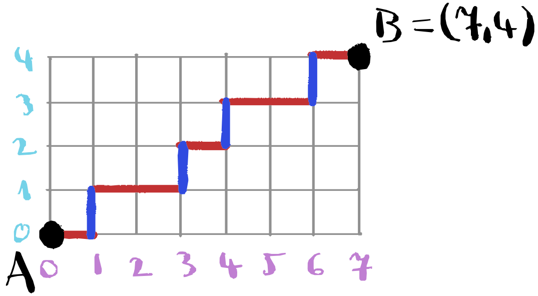
Almák és válaszfalak szerepe felcserélhető:

o | oo | o | oo | o | o || o | o || o |

5 gyereknek 7 alma   8 gyereknek 4 alma

Modell. Hány útvonalon juthatunk el A-ból B-be?

Csak jobbra és felfelé léphetünk!

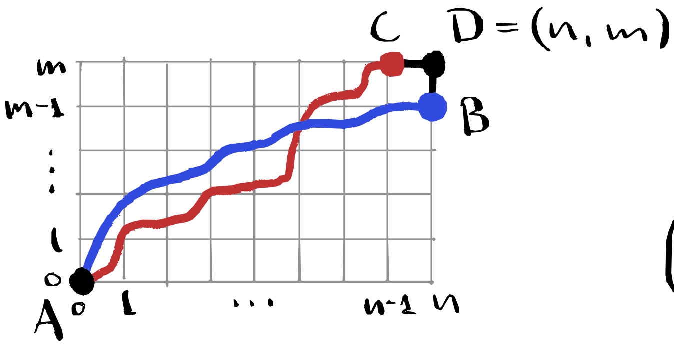


4-et fel, 7-et jobbra, tetszőleges sorrendben

$$G_{7,4} = \binom{4+7}{4} = \binom{4+7}{7} = 330$$

1. Hol hányat lépünk jobbra? $\leftrightarrow$ 5 gyerek, 7 alma
2. Hol hányat lépünk felfelé? $\leftrightarrow$ 8 gyerek, 4 alma

Rekurziós összefüggés



$$G_{n,m} = {\color{blue}G_{n,m-1}} + {\color{red}G_{n-1,m}}$$

$$\binom{n+m}{n} = {\color{blue}\binom{n+m-1}{n}} + {\color{red}\binom{n-1+m}{n-1}}$$

Binomiális együtthatók rekurziós összefüggése: $\binom{N+1}{k} = \binom{N}{k} + \binom{N}{k-1}$

$$\binom{N}{k} + \binom{N}{k-1} = \frac{N!}{k!(N-k)!} + \frac{N!}{(k-1)!\,(N-k+1)!}$$

$$= {\color{blue}1}\,\frac{N!}{k!(N-k)!} + {\color{blue}\frac{k}{N-k+1}}\,\frac{N!}{k!(N-k)!}$$

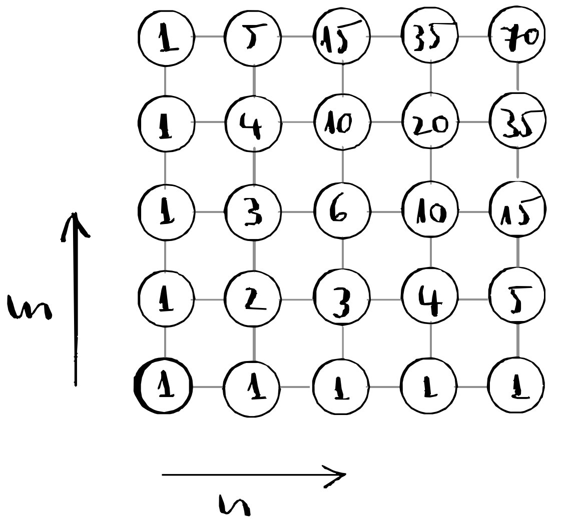
$$= \left({\color{blue}1} + {\color{blue}\frac{k}{N-k+1}}\right)\frac{N!}{k!(N-k)!}$$

$$= \frac{N+1}{N-k+1}\,\frac{N!}{k!(N-k)!} = \frac{(N+1)!}{k!\,(N+1-k)!} = \binom{N+1}{k}$$

Pascal-háromszög

$$\begin{array}{c|c|ccccccccccccc}
 & & & & & & & & k \rightarrow & & & & & & \\
 & 0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & 2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
N \downarrow & 3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & 4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
 & 6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

$$\binom{N+1}{k} = \binom{N}{k} + \binom{N}{k-1}$$



$$\binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m}$$

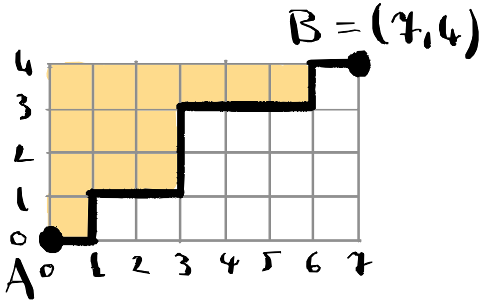
Útvonalak jellemzői

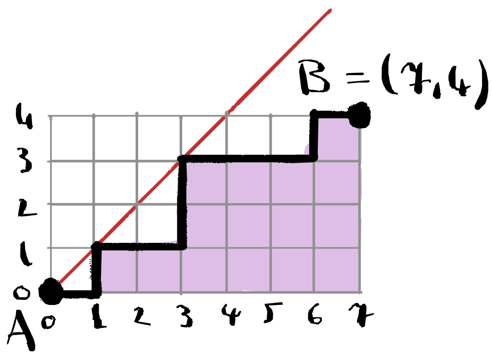
Az útvonalak számára a következőképpen is tekinthetünk:

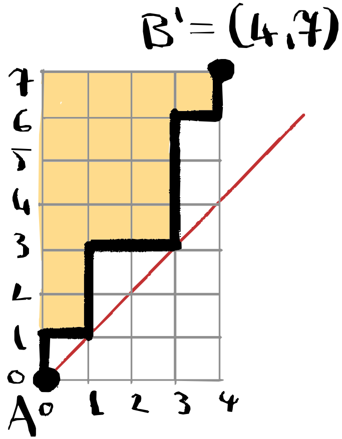
- Minden útvonalat egy 1-essel veszünk figyelembe
- Összeadjuk ezeket az 1-eseket minden útvonalra

Nem teszünk különbséget az útvonalak között!

Lehetséges megkülönböztetés: az A és B által meghatározott téglalapban hány négyzet van az útvonal felett / alatt?







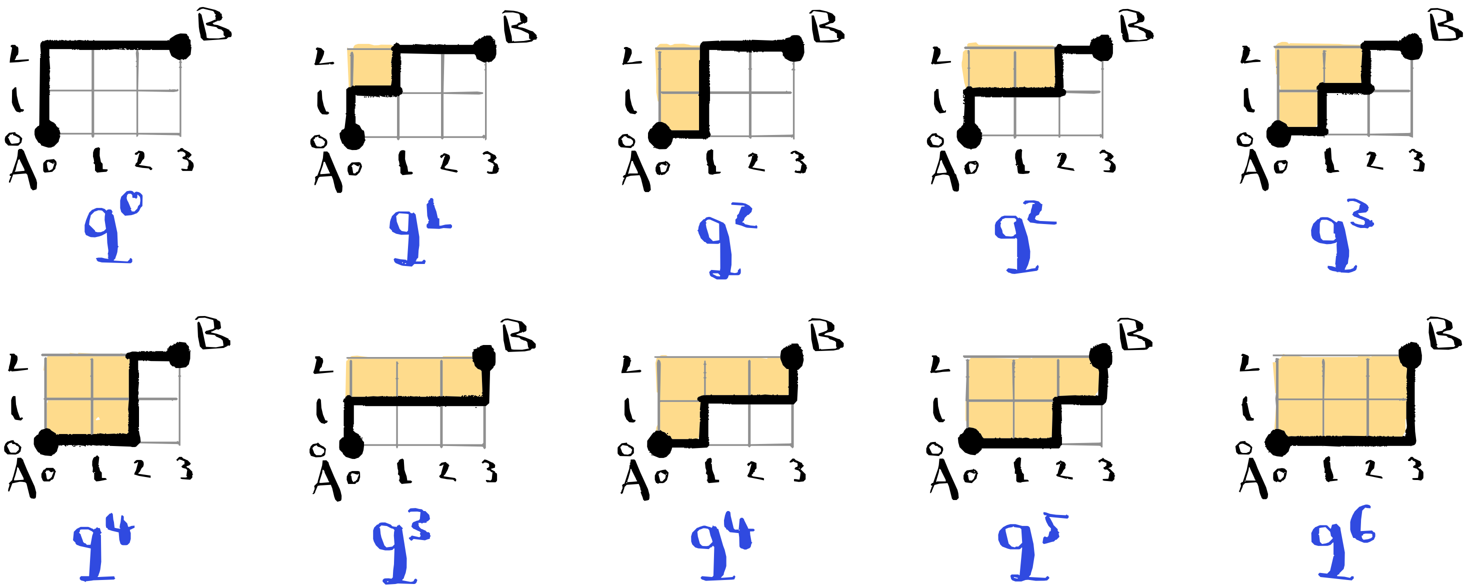
Átlóra való tükrözés → elég csak az egyiket nézni

Generátorfüggvény

- Minden útvonalat q^k-nal vesszük figyelembe

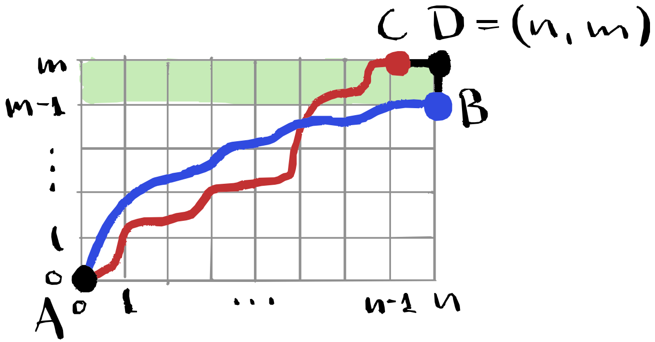
  q az útvonalak vizsgált jellemzőjéhez rendelt változó

  k a jellemző értéke
- Összegezzük ezeket a q-hatványokat minden útvonalra



$$G_{3,2} = q^0 + q^1 + 2q^2 + 2q^3 + 2q^4 + q^5 + q^6$$

Rekurziós összefüggés, Gauss-együtthatók



Binomiális együtthatókkal:

$$G_{n,m} = G_{n,m-1} + G_{n-1,m}$$

$$\binom{n+m}{n} = \binom{n+m-1}{n} + \binom{n-1+m}{n-1}$$

Gauss-együtthatókkal:

$$\tilde{G}_{n,m}(q) = \tilde{G}_{n,m-1}(q)\, q^n + \tilde{G}_{n-1,m}(q)$$

$$\begin{bmatrix} n+m \\ m \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n+m-1 \\ n \end{bmatrix}_q q^n + \begin{bmatrix} n-1+m \\ n-1 \end{bmatrix}_q$$

Gauss-együtthatók rekurziós összefüggése:

$$\begin{bmatrix} N+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix}_q q^k + \begin{bmatrix} N \\ k-1 \end{bmatrix}_q \qquad \begin{bmatrix} N \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ N \end{bmatrix} = 1$$

Gauss-együtthatók kifejezése

Faktoriálishoz hasonló kifejezés:

$$(q)_n \equiv (q^n - 1) \cdots (q-1)$$

$$(q)_n = (q^n - 1)(q)_{n-1}$$

$$(q)_0 = 1$$

Gauss-együtthatók:

$$\begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q)_N}{(q)_k \, (q)_{N-k}}$$

Rekurziós összefüggések:

$$\begin{bmatrix} N+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix}_q q^k + \begin{bmatrix} N \\ k-1 \end{bmatrix}_q$$

Faktoriális:

$$n! = n(n-1) \cdots 1$$

$$n! = n(n-1)!$$

$$0! = 1$$

Binomiális együtthatók:

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!\,(N-k)!}$$

$$\binom{N+1}{k} = \binom{N}{k} + \binom{N}{k-1}$$

Rekurziós összefüggés bizonyítása

$$\begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix}_q q^k + \begin{bmatrix} N \\ k-1 \end{bmatrix}_q = \frac{(q)_N}{(q)_k (q)_{N-k}} q^k + \frac{(q)_N}{(q)_{k-1} (q)_{N-k+1}}$$

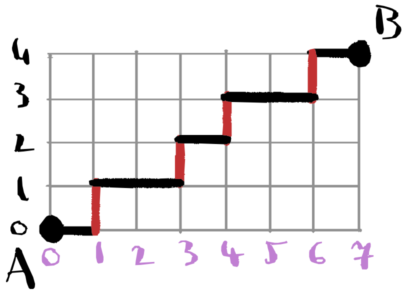
$$= \frac{(q)_N}{(q)_k (q)_{N-k}} q^k + \frac{q^k - 1}{q^{N-k+1} - 1} \frac{(q)_N}{(q)_k (q)_{N-k}}$$

$$= \left(q^k + \frac{q^k - 1}{q^{N-k+1} - 1} \right) \frac{(q)_N}{(q)_k (q)_{N-k}}$$

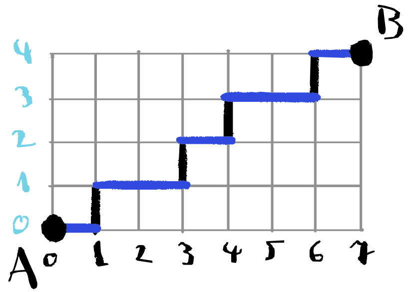
$$= \frac{q^{N+1} - \cancel{q^k} + \cancel{q^k} - 1}{q^{N-k+1} - 1} \frac{(q)_N}{(q)_k (q)_{N-k}}$$

$$= \frac{q^{N+1} - 1}{q^{N-k+1} - 1} \frac{(q)_N}{(q)_k (q)_{N-k}} = \frac{(q)_{N+1}}{(q)_k (q)_{N-k+1}} = \begin{bmatrix} N+1 \\ k \end{bmatrix}_q$$

Útvonalak jellemzői



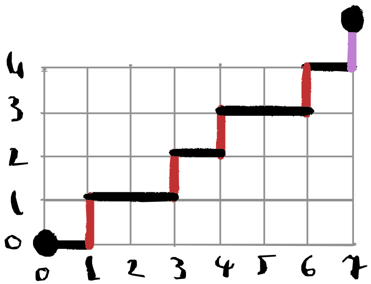
$$x_0^0\, x_1^1\, x_2^0\, x_3^1\, x_4^1\, x_5^0\, x_6^1\, x_7^0$$



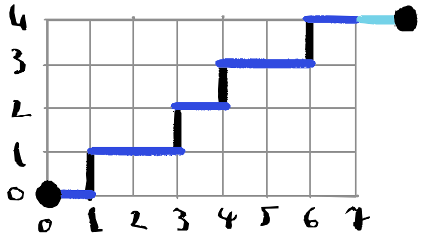
$$y_0^1\, y_1^2\, y_2^1\, y_3^2\, y_4^1$$

Hol hányat lépünk felfelé?

Hol hányat lépünk jobbra?

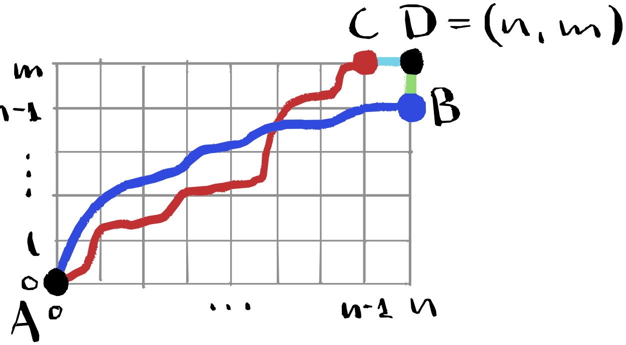


$$x_1^1\, x_3^1\, x_4^1\, x_6^1\, x_7$$



$$y_0^1\, y_1^2\, y_2^1\, y_3^2\, y_4^1\, y_4$$

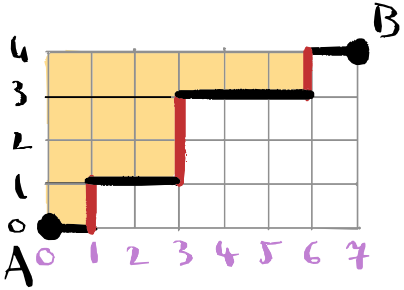
Rekurziós összefüggés



$$\hat{G}_{n,m}(x_0, \dots, x_n) = \hat{G}_{n,m-1}(x_0, \dots, x_n)\, x_n + \hat{G}_{n-1,m}(x_0, \dots, x_{n-1})$$

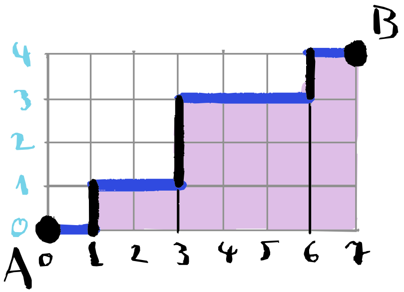
$$\hat{G}_{n,m}(y_0, \dots, y_m) = \hat{G}_{n-1,m}(y_0, \dots, y_m)\, y_m + \hat{G}_{n,m-1}(y_0, \dots, y_{m-1})$$

Generátorfüggvények kapcsolata



$$x_1^1 x_3^2 x_6^1 \longrightarrow (q^1)^1 (q^3)^2 (q^6)^1 = q^{13}$$

$$\tilde{G}_{n,m}(q) = \hat{G}_{n,m}(\underset{x_0}{q^0}, \underset{x_1}{q^1}, \underset{\dots}{\dots}, \underset{x_n}{q^n})$$



$$y_0^1 y_1^2 y_3^3 y_4^1 \longrightarrow (r^0)^1 (r^1)^2 (r^3)^3 (r^4)^1 = r^{15}$$

$$\tilde{G}_{n,m}(r) = \hat{G}_{n,m}(\underset{y_0}{r^0}, \underset{y_1}{r^1}, \underset{\dots}{\dots}, \underset{y_m}{r^m})$$

Összegzés

Permutációk

Kombinációk → Binomiális együtthatók

Ismétléses kombinációk

Útvonalak száma → Pascal - háromszög

Generátorfüggvények 1 → Gauss - együtthatók

Generátorfüggvények 2

Generátorfüggvények kapcsolata

szzsolt@math.bme.hu

Köszönöm a figyelmet!