

Matematika A1a (BMETE90AX00)

Vegyészmérnöki és Biomérnöki Kar

tételsor

2025. december 14.

Általános információk

- Az írásbeli vizsga egy tesztből és egy kifejtős kérdéssorból áll.
- Az írásbeli vizsgán csak a tárgyhonlapon található deriválttáblázat vagy az azal azonos információtartalmú táblázat használható, más segédeszköz (pl. számológép) nem.
- Alapértelmezésként minden, a tananyagban előforduló definíciót és állítást ismerni kell a vizsgán. Ezen kívül bizonyos tételek bizonyítását is tudni kell ismertetni. Ezt pontosítja az alábbi tételsor. **A bizonyítással együtt számonkért tételeket, állításokat vastag szedéssel jelöljük.**

Tételek

1. Trigonometrikus függvények kiterjesztése

Szögfüggvények kiterjesztése. Trigonometrikus függvények tulajdonságai. **sin és cos négyzetösszege, linearizációs formulák.**

2. Komplex számok

Komplex szám algebrai alakja, valós és képzetes része, abszolút értéke, konjugáltja. Komplex szám trigonometrikus alakja. **Szorzás és hatványozás trigonometrikus alakban.** Gyökvonás trigonometrikus alakban. Az algebra alaptétele.

3. Valós számsorozatok

Számsorozatok, monotonitás, korlátosság. Számsorozat konvergenciája. **Az $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat 0-hoz tart. Minden konvergens sorozat korlátos.** Végtelen határérték. A sorozat-határérték műveleti tulajdonságai. Nevezetes határértékek. Nagyságrendek. Rendőrelv. Speciális rendőrelv.

0-oz tartó számsorozat abszolút értékének határértéke. Egy számsorozat reciproka pontosan akkor tart 0-hoz, ha az abszolút értéke $+\infty$ -hez. Korlátos és 0-hoz tartó sorozat szorzatának határértéke. Monoton és korlátos sorozat konvergenciája.

Részsorozatok. Konvergens sorozat részsorozatai. Az $(1 + \frac{1}{n})^n$ sorozat és az e szám. Exponenciális függvény.

4. Függvények határértéke, folytonossága

Függvénytani alapfogalmak, jelölések. Függvénykompozíció. Injektivitás és szürjektivitás. Inverz függvény.

Függvények pontbeli folytonossága. Összetett függvények és függvénykompozíció folytonossága. Nevezetes függvények folytonossága.

Kibővített valós számegyenes. Torlódási pont. Függvények pontbeli határértéke. A határérték és folytonosság kapcsolata. A függvényhatárérték műveleti tulajdonságai. Nevezetes függvényhatárértékek.

Féloldali határértékek. Kapcsolat a kétoldali határértékkel.

A $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ határérték.

Folytonos függvényekre vonatkozó tételek: Bolzano-tétel, Weierstrass-féle maximum-minimum elv. Az inverzfüggvény folytonossága.

5. Differenciálszámítás

Pontbeli differenciálhatóság és derivált. **Differenciálhatóság és folytonosság kapcsolata.** Nevezetes függvények deriváltjai. **A szinuszfüggvény deriváltja.** Deriválási szabályok. Függvénykompozíció deriváltja. Az inverzfüggvény deriváltja.

Monotonitás és derivált kapcsolata. Lokális szélsőértékek. A lokális szélsőértékek létezésének szükséges feltétele. Elégséges feltételek lokális szélsőérték létezéséhez.

Konvexitás, inflexiós pontok. Konvexitás és második derivált kapcsolata. Szükséges feltétel inflexiós pont létezéséhez. Elégséges feltétel inflexiós pont létezéséhez. Függvényvizsgálat. Folytonos függvény szélsőértékei korlátos és zárt intervallumon (ld. gyakorlat, 8. feladatsor).

Arkusz függvények. **Arkusz függvények deriváltja.** Hiperbolikus függvények definíciója és alaptulajdonságai. Area függvények. **Hiperbolikus és area függvények deriváltja.**

Rolle-tétel. Lagrange-féle középértéktétel. Nyílt intervallumon 0 deriváltú függvény konstans.

L'Hospital-szabály.

6. Határozatlan integrál

Primitív függvények és határozatlan integrál. **Nyílt intervallumon értelmezett függvény határozatlan integrálja.** Alapintegrálok. A határozatlan integrál műveleti tulajdonságai.

A függvénykompozíció differenciálása integrálalakban; ennek speciális esetei: $\frac{f}{f'}$ és $f^\alpha f'$ alakú integrandusok. Parciális integrálás. Helyettesítéses integrálás. Racionális törtfüggvények integrálása. Trigonometrikus szorzatintegrálok.

7. Határozott integrál

Korlátos halmaz infimuma, szuprimuma. Intervallum felosztása, alsó és felső közelítő összeg, Riemann-integrálhatóság és integrál. A határozott integrál alaptulajdonságai: linearitás és tartomány szerinti additivitás. A Riemann-integrálhatóság elégséges feltételei.

Newton – Leibniz-formula. Parciális és helyettesítéssel integrálás. Az integrálfüggvény tulajdonságai.

Alkalmazások: területszámítás, forgástest térfogata, palástjának felszíne.

Improprius integrál.

8. Numerikus sorok

Numerikus sor fogalma. Konvergencia, numerikus sor összege. **Sorok konvergenciájának szükséges feltétele.** A $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{n}$ sor divergens. A $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens. **Mértani sor összege.** Sorok összege és konstansszorosa.

Majoráns és minoráns kritérium. **Gyökkritérium.** Hányadoskritérium.

Integrálkritérium. Hiperharmonikus sorok konvergenciája. Hibabecslés nemnegatív tagú sorok összegének közelítésére.

Abszolút konvergencia. **Minden abszolút konvergens sor konvergens.** Sorok átrendezései és a Riemann-féle átrendezési tétel.

Alternáló sorok és Leibniz-kritérium.