

1. feladat (5+5+10=20 pont)

$$a) \int x^2 \ln(x) dx = ? \quad b) \int \operatorname{ctg}(x) dx = ? \quad c) \int_3^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2(x)} dx = ?$$

Mo. a) Parciális integrálással (1p) :

$$\int x^2 \ln(x) dx \stackrel{(2p)}{=} \frac{x^3}{3} \ln(x) - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx \stackrel{(2p)}{=} \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{x^3}{9} + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

b)

$$\int \operatorname{ctg}(x) \stackrel{(2p)}{=} \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx \stackrel{(3p)}{=} \ln(|\sin(x)|) + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

c)

$$\begin{aligned} \int_3^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2(x)} dx &\stackrel{(2p)}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_3^b \frac{1}{x \ln^2(x)} dx \stackrel{(4p)}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\ln(x)} \right]_{x=3}^b \stackrel{(2p)}{=} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln(3)} - \frac{1}{\ln(b)} \right) \stackrel{(2p)}{=} \frac{1}{\ln(3)}. \end{aligned}$$

2. feladat (7+7=14 pont)

Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a) \sum_{n \in \mathbb{N}^+} \left(\frac{n+2}{n+4} \right)^{n^2} \quad b) \sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

Mo. a) Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $a_n := \left(\frac{n+2}{n+4} \right)^{n^2}$. Ekkor

$$\sqrt[n]{a_n} \stackrel{(2p)}{=} \left(\frac{n+2}{n+4} \right)^n \stackrel{(2p)}{=} \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{e^2}{e^4} = \frac{1}{e^2} < 1,$$

tehát a gyökkritérium alapján a $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} a_n$ sor konvergens (2p) .

b) Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \stackrel{(2p)}{\geq} \frac{1}{n+1} \stackrel{(1p)}{\geq} 0,$$

és $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{n+1}$ divergens (2p) , tehát a minoráns kritérium alapján a $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ sor divergens (2p) .

3. feladat (6+10=16 pont)

Mondjuk ki és bizonyítsuk a Newton – Leibniz-formulát.

Mo. Tétel. (Newton – Leibniz-formula.) Legyenek $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $[a, b] \subseteq \text{Dom}(f)$, és tegyük fel, hogy f integrálható $[a, b]$ -n **(1p)**, továbbá F folytonos $[a, b]$ -n **(1p)**, differenciálható $]a, b[$ -n, és minden $x \in]a, b[$ esetén $F'(x) = f(x)$ **(1p)**. Ekkor

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) =: [F(x)]_{x=a}^b. \quad \textbf{(3p)}$$

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{F} := (x_0, x_1, \dots, x_n)$ az $[a, b]$ intervallum tetszőleges felosztása. Belátjuk, hogy ekkor

$$s_{\mathcal{F}}(f) \leq F(b) - F(a) \leq S_{\mathcal{F}}(f) \quad \textbf{(2p)}$$

Legyen $j \in \{0, \dots, n-1\}$ tetszőleges. A Lagrange középértéktételt alkalmazva az $[x_j, x_{j+1}]$ intervallumra és az F függvényre, kapjuk, hogy létezik olyan $z_j \in]x_j, x_{j+1}[$, amelyre

$$f(z_j) = F'(z_j) = \frac{F(x_{j+1}) - F(x_j)}{x_{j+1} - x_j} \quad \textbf{(2p)}$$

teljesül. Ekkor közelítő összeg definíciójában szereplő jelölésekkel:

$$s_{\mathcal{F}}(f) = \sum_{j=0}^{n-1} m_j(x_{j+1} - x_j) \leq \sum_{j=0}^{n-1} f(z_j)(x_{j+1} - x_j) \leq \sum_{j=0}^{n-1} M_j(x_{j+1} - x_j) = S_{\mathcal{F}}(f), \quad \textbf{(2p)}$$

valamint az imént bizonyítottak alapján

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(z_j)(x_{j+1} - x_j) = \sum_{j=0}^{n-1} F(x_{j+1}) - F(x_j) = F(b) - F(a), \quad \textbf{(2p)}$$

következésképpen

$$\sup\{s_{\mathcal{F}}(f) \mid \mathcal{F} \text{ az } [a, b] \text{ egy felosztása}\} \leq F(b) - F(a) \leq \inf\{S_{\mathcal{F}}(f) \mid \mathcal{F} \text{ az } [a, b] \text{ egy felosztása}\}. \quad \textbf{(1p)}$$

Mivel az f függvény integrálható $[a, b]$ -n ezért a fenti egyenlőtlenségek helyett egyenlőséget írhatunk, azaz

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a). \quad \textbf{(1p)}$$