

1. feladat (6+7+7=20 pont)

a) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}} dx = ?$ b) $\int_0^\pi \sin^3(x) dx = ?$ c) $\int \frac{1}{x^2-2x+2} dx = ?$

Mo. a)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}} dx \stackrel{(3p)}{=} \frac{1}{3} \int 3x^2(x^3+1)^{-\frac{1}{3}} dx \stackrel{(3p)}{=} \frac{1}{2}(x^3+1)^{\frac{2}{3}} + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

b)

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^3(x) dx &\stackrel{(3p)}{=} \int_0^\pi (1-\cos^2(x)) \sin(x) dx \stackrel{(1p)}{=} \int_0^\pi \sin(x) - \cos^2(x) \sin(x) dx \stackrel{(2p)}{=} \\ &= \left[-\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3} \right]_{x=0}^\pi \stackrel{(1p)}{=} \frac{4}{3} \end{aligned}$$

c)

$$\int \frac{1}{x^2-2x+2} dx \stackrel{(3p)}{=} \int \frac{1}{1+(x-1)^2} dx \stackrel{(4p)}{=} \arctg(x-1) + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

2. feladat (5+9=14 pont)

Konvergensek-e az alábbi sorok? Konvergencia esetén legfeljebb mekkora hibát követünk el, ha a sorösszeget a 99. részletösszeggel közelítjük?

a) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n$ b) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{5^n + n^2}$

Mo. a) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $a_n := \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n$. Ekkor

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n \stackrel{(2p)}{=} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(1p)} \frac{e}{e^2} = \frac{1}{e} \neq 0,$$

tehát a sorok konvergenciájára vonatkozó szükséges feltétel miatt $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ divergens **(2p)**.

b) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$0 \leq b_n := \frac{1}{5^n + n^2} \stackrel{(2p)}{\leq} \left(\frac{1}{5} \right)^n,$$

és $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{5} \right)^n$ konvergens **(1p)**, tehát a majoráns kritérium alapján a $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ sor konvergens **(1p)**.

Hibabecslés: Legyen $S := \sum_{n=0}^\infty b_n$. Ekkor

$$\left| S - \sum_{n=0}^{99} b_n \right| \stackrel{(1p)}{=} \sum_{n=100}^\infty b_n \stackrel{(2p)}{\leq} \sum_{n=100}^\infty \left(\frac{1}{5} \right)^n \stackrel{(2p)}{=} \frac{1}{5^{100}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{4 \cdot 5^{99}}$$

3. feladat (4+12=16 pont)

Mondjuk ki és bizonyítsuk a szinuszfüggvény deriváltjáról szóló tételt.

Mo. Tétel. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén **(1p)**

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \mathbf{(3p)}$$

Bizonyítás. Legyen $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} &\stackrel{\mathbf{(1p)}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(a+t) - \sin(a)}{t} \stackrel{\mathbf{(2p)}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(a)\cos(t) + \cos(a)\sin(t) - \sin(a)}{t} \stackrel{\mathbf{(2p)}}{=} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(a)(\cos(t) - 1)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \cos(a) \frac{\sin(t)}{t} \stackrel{\mathbf{(2p)}}{=} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(a)(\cos^2(t) - 1)}{t(\cos(t) + 1)} + \cos(a) \stackrel{\mathbf{(2p)}}{=} \\ &= \sin(a) \cdot \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin^2(t)}{t^2}}_{-1 \text{ (1p)}} \cdot \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\cos(t) + 1}}_{0 \text{ (1p)}} + \cos(a) \stackrel{\mathbf{(1p)}}{=} \cos(a) \end{aligned}$$