1. feladat (6+8+6=20 pont)

a) $\int e^x\sqrt{e^x+3}\,\mathrm{d}x = ?$ *b)* $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x = ?$ *c)* $\int x\cdot\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = ?$

Mo. *a)*

$$\int e^x\sqrt{e^x+3}\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \int e^x(e^x+3)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{4p})}{=} \frac{2}{3}(e^x+3)^{\frac{3}{2}}+C \quad (C\in\mathbb{R}).$$

b)

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{1p})}{=} \lim_{a\to+\infty}\int_3^a \frac{1}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \lim_{a\to+\infty}\int_3^a \frac{1}{1+(x-2)^2}\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=}$$

$$= \lim_{a\to+\infty}\left[\mathrm{arctg}(x-2)\right]_3^a \overset{(\mathbf{1p})}{=} \lim_{a\to+\infty}\mathrm{arctg}(a-2)-\mathrm{arctg}(1) \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

c)

$$\int x\cdot\cos(x^2)\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{1}{2}\int 2x\cdot\cos(x^2)\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{1}{2}\sin(x^2)+C \quad (C\in\mathbb{R}).$$

---

2. feladat (7+7=14 pont)
Konvergensek-e az alábbbi sorok?

a) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^3+2}{n^5+3n^2}$ *b)* $\sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{n^3\cdot 5^n}{(2n)!}$

Mo. *a)* Minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\frac{n^3+2}{n^5+3n^2} \overset{(\mathbf{4p})}{\le} \frac{3n^3}{n^5} = \frac{3}{n^2},$$

és a $\sum_{n\in\mathbb{N}^+}\frac{3}{n^2}$ sor konvergens **(2p)** , tehát a majoráns kritérium alapján az eredeti is **(1p)**.

b) Legyen $b_n := \frac{n^3\cdot 5^n}{(2n)!} \quad (n\in\mathbb{N}^+)$.
Ekkor

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{(n+1)^3 5^{n+1}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{n^3\cdot 5^n} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{5(n+1)^3}{n^3(2n+2)(2n+1)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0<1 \quad (\mathbf{2p}).$$

Tehát a hányadoskritérium alapján $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ konvergens **(2p)** .

---

3. feladat (3+13=16 pont)
a) Mikor nevezünk abszolút konvergensnek egy numerikus sort? (Írjuk le a definíciót.)
b) Mi a kapcsolat egy numerikus sor abszolút konvergenciája és konvergencája között? Mondjuk ki és bizonyítsuk az erről szóló tételt.

Mo. *a*) *Definíció.* A $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor **abszolút konvergens**, ha a $\sum |a_n|$ sor konvergens **(3p)**.

b) *Tétel.* Minden abszolút konvergens sor konvergens. **(3p)**
Bizonyítás. Legyen $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ abszolút konvergens numerikus sor. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$-|a_n| \le a_n \le |a_n| \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n| \quad (\mathbf{3p})$$

és a $\sum 2|a_n|$ sor konvergens **(1p)** , tehát a majoráns kritérium alapján a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n + |a_n|$ sor konvergens **(2p)** , így a konvergens sorok műveleti tulajdonságai alapján a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n + |a_n| - \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \quad (\mathbf{3p})$$

sor is konvergens **(1p)** .
