

1. feladat (4+8+8=20 pont)

$$a) \int \frac{x-2}{x^2-4x+5} dx \quad b) \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2-4x+5} dx =? \quad c) \int \sqrt{e^x-1} dx =?$$

(A c) részben alkalmazzuk a $t := \sqrt{e^x-1}$ helyettesítést.)

Mo. a)

$$\int \frac{x-2}{x^2-4x+5} dx \stackrel{(2p)}{=} \frac{1}{2} \int \frac{2x-4}{x^2-4x+5} dx \stackrel{(2p)}{=} \frac{1}{2} \ln(x^2-4x+5) + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

b)

$$\begin{aligned} \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2-4x+5} dx &\stackrel{(1p)}{=} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_3^a \frac{1}{x^2-4x+5} dx \stackrel{(2p)}{=} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_3^a \frac{1}{1+(x-2)^2} dx \stackrel{(2p)}{=} \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} [\arctg(x-2)]_3^a \stackrel{(1p)}{=} \lim_{a \rightarrow +\infty} \arctg(a-2) - \arctg(1) \stackrel{(2p)}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$c) t := \sqrt{e^x-1} \Leftrightarrow x = \ln(t^2+1) \implies "dx = \frac{2t}{t^2+1} dt" \quad (2p)$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{e^x-1} dx &\stackrel{(1p)}{=} \int \frac{2t^2}{t^2+1} dx \stackrel{(2p)}{=} \int 2 - \frac{2}{t^2+1} \stackrel{(2p)}{=} 2t - 2 \arctg(t) + C \stackrel{(1p)}{=} \\ &= 2\sqrt{e^x-1} - 2 \arctg(\sqrt{e^x-1}) + C \quad (C \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

2. feladat (6+8=14 pont)

Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a) \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{n^2+2}{2n^2+1} \right)^n \quad b) \sum_{n \in \mathbb{N}, n \geq 2} \frac{\sin(n^2)}{n^2 \ln(n)}$$

Mo. a) Legyen $a_n := \left(\frac{n^2+2}{2n^2+1} \right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$.

$$\sqrt[n]{a_n} \stackrel{(1p)}{=} \frac{n^2+2}{2n^2+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(2p)} \frac{1}{2} < 1 \quad (1p),$$

tehát a gyökkritérium alapján **(1p)** a $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ sor konvergens **(1p)**.

b) Legyen $b_n := \frac{\sin(n^2)}{n^2 \ln(n)} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$.

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ esetén

$$|b_n| \leq \frac{1}{n^2} \quad (5p),$$

és $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ konvergens, tehát a majoráns kritérium alapján $\sum_{n \in \mathbb{N}, n \geq 2} b_n$ abszolút konvergens **(2p)** következésképpen konvergens **(1p)**.

3. feladat (3+13=16 pont)

Mit mondhatunk egy korlátos és egy 0-hoz tartó sorozat szorzatának határértékéről? Mondjuk ki és bizonyítsuk az erről szóló tételt.

Mo. Tétel. Legyenek $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ számsorozatok. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ és $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ korlátos, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$. **(3p)**

Bizonyítás. Legyen $K \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|b_n| \leq K$. **(2p)** Az $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ feltétel miatt $\frac{\varepsilon}{K}$ -hoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén **(2p)**

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{K}. \quad \mathbf{(4p)}$$

Ez azt jelenti, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon \quad \mathbf{(4p)},$$

következésképpen $a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ **(1p)**.
