

# Matematika A2, VBK 10. előadás

Takács Balázs

Budapest, 2026. március 19.

## Definíció

$A (V, +, \cdot)$  hármast  $\mathbb{R}$  feletti (vagy: valós) **vektortérnek** nevezzük, ha  $V$  nemüres halmaz, valamint  $+: V \times V \rightarrow V$  és  $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$  olyan műveletek, amelyekre az alábbi tulajdonságok teljesülnek.

- Minden  $u, v, w \in V$  esetén  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (azaz  $+$  művelet **asszociatív**).
- Minden  $u, v \in V$  esetén  $u + v = v + u$  (azaz  $+$  művelet **kommutatív**).
- Létezik olyan  $\mathbf{0} \in V$ , hogy minden  $v \in V$  esetén  $\mathbf{0} + v = v$  (azaz  $+$  művelet **neutrális-elemes**).
- Minden  $v \in V$  esetén létezik olyan  $-v \in V$ , amelyre  $v + (-v) = \mathbf{0}$  (azaz  $+$  művelet **inverzelemes**).
- Minden  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $v \in V$  esetén  $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \mu) \cdot v$ .
- Minden  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $u, v \in V$  esetén  $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \mu \cdot v$ .
- Minden  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $v \in V$  esetén  $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ .
- Minden  $v \in V$  esetén  $1 \cdot v = v$ .

$V$  elemeit **vektoroknak** nevezzük.

## Definíció

A  $(V, +, \cdot)$  hármast  $\mathbb{R}$  feletti (vagy: valós) **vektortérnek** nevezzük, ha  $V$  nemüres halmaz, valamint  $+: V \times V \rightarrow V$  és  $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$  olyan műveletek, amelyekre az alábbi tulajdonságok teljesülnek.

- Minden  $u, v, w \in V$  esetén  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (azaz  $+$  művelet **asszociatív**).
- Minden  $u, v \in V$  esetén  $u + v = v + u$  (azaz  $+$  művelet **kommutatív**).
- Létezik olyan  $\mathbf{0} \in V$ , hogy minden  $v \in V$  esetén  $\mathbf{0} + v = v$  (azaz  $+$  művelet **neutrális-elemes**).
- Minden  $v \in V$  esetén létezik olyan  $-v \in V$ , amelyre  $v + (-v) = \mathbf{0}$  (azaz  $+$  művelet **inverzelemes**).
- Minden  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $v \in V$  esetén  $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \mu) \cdot v$ .
- Minden  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $u, v \in V$  esetén  $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \mu \cdot v$ .
- Minden  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $v \in V$  esetén  $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ .
- Minden  $v \in V$  esetén  $1 \cdot v = v$ .

$V$  elemeit **vektoroknak** nevezzük.

## Definíció

A  $(V, +, \cdot)$  hármast  $\mathbb{R}$  feletti (vagy: valós) **vektortérnek** nevezzük, ha  $V$  nemüres halmaz, valamint  $+: V \times V \rightarrow V$  és  $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$  olyan műveletek, amelyekre az alábbi tulajdonságok teljesülnek.

- Minden  $u, v, w \in V$  esetén  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (azaz a + művelet **asszociatív**).
- Minden  $u, v \in V$  esetén  $u + v = v + u$  (azaz a + művelet **kommutatív**).
- Létezik olyan  $\mathbf{0} \in V$ , hogy minden  $v \in V$  esetén  $\mathbf{0} + v = v$  (azaz a + művelet **neutrális-elemes**).
- Minden  $v \in V$  esetén létezik olyan  $-v \in V$ , amelyre  $v + (-v) = \mathbf{0}$  (azaz a + művelet **inverzelemes**).
- Minden  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $v \in V$  esetén  $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \mu) \cdot v$ .
- Minden  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $u, v \in V$  esetén  $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ .
- Minden  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $v \in V$  esetén  $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ .
- Minden  $v \in V$  esetén  $1 \cdot v = v$ .

$V$  elemeit **vektoroknak** nevezzük.

## Definíció

A  $(V, +, \cdot)$  hármast  $\mathbb{R}$  feletti (vagy: valós) **vektortérnek** nevezzük, ha  $V$  nemüres halmaz, valamint  $+: V \times V \rightarrow V$  és  $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$  olyan műveletek, amelyekre az alábbi tulajdonságok teljesülnek.

- Minden  $u, v, w \in V$  esetén  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (azaz a + művelet **asszociatív**).
- Minden  $u, v \in V$  esetén  $u + v = v + u$  (azaz a + művelet **kommutatív**).
- Létezik olyan  $\mathbf{0} \in V$ , hogy minden  $v \in V$  esetén  $\mathbf{0} + v = v$  (azaz a + művelet **neutrális-elemes**).
- Minden  $v \in V$  esetén létezik olyan  $-v \in V$ , amelyre  $v + (-v) = \mathbf{0}$  (azaz a + művelet **inverzelemes**).
- Minden  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $v \in V$  esetén  $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \mu) \cdot v$ .
- Minden  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $u, v \in V$  esetén  $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ .
- Minden  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $v \in V$  esetén  $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ .
- Minden  $v \in V$  esetén  $1 \cdot v = v$ .

$V$  elemeit **vektoroknak** nevezzük.

## Definíció

A  $(V, +, \cdot)$  hármast  $\mathbb{R}$  feletti (vagy: valós) **vektortérnek** nevezzük, ha  $V$  nemüres halmaz, valamint  $+: V \times V \rightarrow V$  és  $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$  olyan műveletek, amelyekre az alábbi tulajdonságok teljesülnek.

- Minden  $u, v, w \in V$  esetén  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (azaz a + művelet **asszociatív**).
- Minden  $u, v \in V$  esetén  $u + v = v + u$  (azaz a + művelet **kommutatív**).
- Létezik olyan  $\mathbf{0} \in V$ , hogy minden  $v \in V$  esetén  $\mathbf{0} + v = v$  (azaz a + művelet **neutrális-elemes**).
- Minden  $v \in V$  esetén létezik olyan  $-v \in V$ , amelyre  $v + (-v) = \mathbf{0}$  (azaz a + művelet **inverzelemes**).
- Minden  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $v \in V$  esetén  $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \mu) \cdot v$ .
- Minden  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $u, v \in V$  esetén  $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ .
- Minden  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $v \in V$  esetén  $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ .
- Minden  $v \in V$  esetén  $1 \cdot v = v$ .

$V$  elemeit **vektoroknak** nevezzük.

## Definíció

$A(V, +, \cdot)$  hármast  $\mathbb{R}$  feletti (vagy: valós) **vektortérnek** nevezünk, ha  $V$  nemüres halmaz, valamint  $+: V \times V \rightarrow V$  és  $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$  olyan műveletek, amelyekre az alábbi tulajdonságok teljesülnek.

- Minden  $u, v, w \in V$  esetén  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (azaz  $+$  művelet **asszociatív**).
- Minden  $u, v \in V$  esetén  $u + v = v + u$  (azaz  $+$  művelet **kommutatív**).
- Létezik olyan  $\mathbf{0} \in V$ , hogy minden  $v \in V$  esetén  $\mathbf{0} + v = v$  (azaz  $+$  művelet **neutrális-elemes**).
- Minden  $v \in V$  esetén létezik olyan  $-v \in V$ , amelyre  $v + (-v) = \mathbf{0}$  (azaz  $+$  művelet **inverzelemes**).
- Minden  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $v \in V$  esetén  $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \mu) \cdot v$ .
- Minden  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $u, v \in V$  esetén  $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ .
- Minden  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $v \in V$  esetén  $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ .
- Minden  $v \in V$  esetén  $1 \cdot v = v$ .

$V$  elemeit **vektoroknak** nevezünk.

## Definíció

A  $(V, +, \cdot)$  hármast  $\mathbb{R}$  feletti (vagy: valós) **vektortérnek** nevezzük, ha  $V$  nemüres halmaz, valamint  $+: V \times V \rightarrow V$  és  $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$  olyan műveletek, amelyekre az alábbi tulajdonságok teljesülnek.

- Minden  $u, v, w \in V$  esetén  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (azaz a + művelet **asszociatív**).
- Minden  $u, v \in V$  esetén  $u + v = v + u$  (azaz a + művelet **kommutatív**).
- Létezik olyan  $\mathbf{0} \in V$ , hogy minden  $v \in V$  esetén  $\mathbf{0} + v = v$  (azaz a + művelet **neutrális-elemes**).
- Minden  $v \in V$  esetén létezik olyan  $-v \in V$ , amelyre  $v + (-v) = \mathbf{0}$  (azaz a + művelet **inverzelemes**).
- Minden  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $v \in V$  esetén  $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \mu) \cdot v$ .
- Minden  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $u, v \in V$  esetén  $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \mu \cdot v$ .
- Minden  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $v \in V$  esetén  $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ .
- Minden  $v \in V$  esetén  $1 \cdot v = v$ .

$V$  elemeit **vektoroknak** nevezzük.

## Definíció

A  $(V, +, \cdot)$  hármast  $\mathbb{R}$  feletti (vagy: valós) **vektortérnek** nevezzük, ha  $V$  nemüres halmaz, valamint  $+: V \times V \rightarrow V$  és  $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$  olyan műveletek, amelyekre az alábbi tulajdonságok teljesülnek.

- Minden  $u, v, w \in V$  esetén  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (azaz a + művelet **asszociatív**).
- Minden  $u, v \in V$  esetén  $u + v = v + u$  (azaz a + művelet **kommutatív**).
- Létezik olyan  $\mathbf{0} \in V$ , hogy minden  $v \in V$  esetén  $\mathbf{0} + v = v$  (azaz a + művelet **neutrális-elemes**).
- Minden  $v \in V$  esetén létezik olyan  $-v \in V$ , amelyre  $v + (-v) = \mathbf{0}$  (azaz a + művelet **inverzelemes**).
- Minden  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $v \in V$  esetén  $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \mu) \cdot v$ .
- Minden  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $u, v \in V$  esetén  $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \mu \cdot v$ .
- Minden  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $v \in V$  esetén  $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ .
- Minden  $v \in V$  esetén  $1 \cdot v = v$ .

$V$  elemeit **vektoroknak** nevezzük.

## Definíció

A  $(V, +, \cdot)$  hármast  $\mathbb{R}$  feletti (vagy: valós) **vektortérnek** nevezzük, ha  $V$  nemüres halmaz, valamint  $+: V \times V \rightarrow V$  és  $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$  olyan műveletek, amelyekre az alábbi tulajdonságok teljesülnek.

- Minden  $u, v, w \in V$  esetén  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (azaz a + művelet **asszociatív**).
- Minden  $u, v \in V$  esetén  $u + v = v + u$  (azaz a + művelet **kommutatív**).
- Létezik olyan  $\mathbf{0} \in V$ , hogy minden  $v \in V$  esetén  $\mathbf{0} + v = v$  (azaz a + művelet **neutrális-elemes**).
- Minden  $v \in V$  esetén létezik olyan  $-v \in V$ , amelyre  $v + (-v) = \mathbf{0}$  (azaz a + művelet **inverzelemes**).
- Minden  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $v \in V$  esetén  $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \mu) \cdot v$ .
- Minden  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $u, v \in V$  esetén  $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \mu \cdot v$ .
- Minden  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $v \in V$  esetén  $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ .
- Minden  $v \in V$  esetén  $1 \cdot v = v$ .

$V$  elemeit **vektoroknak** nevezzük.

## Definíció

A  $(V, +, \cdot)$  hármast  $\mathbb{R}$  feletti (vagy: valós) **vektortérnek** nevezzük, ha  $V$  nemüres halmaz, valamint  $+: V \times V \rightarrow V$  és  $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$  olyan műveletek, amelyekre az alábbi tulajdonságok teljesülnek.

- Minden  $u, v, w \in V$  esetén  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (azaz  $+$  művelet **asszociatív**).
- Minden  $u, v \in V$  esetén  $u + v = v + u$  (azaz  $+$  művelet **kommutatív**).
- Létezik olyan  $\mathbf{0} \in V$ , hogy minden  $v \in V$  esetén  $\mathbf{0} + v = v$  (azaz  $+$  művelet **neutrális-elemes**).
- Minden  $v \in V$  esetén létezik olyan  $-v \in V$ , amelyre  $v + (-v) = \mathbf{0}$  (azaz  $+$  művelet **inverzelemes**).
- Minden  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $v \in V$  esetén  $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \mu) \cdot v$ .
- Minden  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $u, v \in V$  esetén  $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \mu \cdot v$ .
- Minden  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  és  $v \in V$  esetén  $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ .
- Minden  $v \in V$  esetén  $1 \cdot v = v$ .

$V$  elemeit **vektoroknak** nevezzük.

### Definíció

*Legyen  $V$  valós vektortér. Azt mondjuk, hogy a  $\emptyset \neq W \subseteq V$  halmaz **altér**  $V$ -ben, ha  $W$  a  $V$ -beli műveletek leszűkítéseivel és a  $V$ -beli nullvektorral valós vektorteret alkot.*

### Állítás

*Legyen  $V$  valós vektortér. A  $\emptyset \neq W \subseteq V$  halmaz pontosan akkor altér, ha az alábbi két tulajdonság teljesül rá:*

- minden  $v, w \in W$  esetén  $v + w \in W$ ,*
- minden  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $v \in W$  esetén  $\lambda \cdot v \in W$ .*

Nem bizonyítjuk. (Ld. [1] 4.2.2. Tétel.)

### Definíció

*Legyen  $V$  valós vektortér. Azt mondjuk, hogy a  $\emptyset \neq W \subseteq V$  halmaz **altér**  $V$ -ben, ha  $W$  a  $V$ -beli műveletek leszűkítéseivel és a  $V$ -beli nullvektorral valós vektorteret alkot.*

### Állítás

*Legyen  $V$  valós vektortér. A  $\emptyset \neq W \subseteq V$  halmaz pontosan akkor altér, ha az alábbi két tulajdonság teljesül rá:*

- *minden  $v, w \in W$  esetén  $v + w \in W$ ,*
- *minden  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $v \in W$  esetén  $\lambda \cdot v \in W$ .*

Nem bizonyítjuk. (Ld. [1] 4.2.2. Tétel.)

### Definíció

*Legyen  $V$  valós vektortér. Azt mondjuk, hogy a  $\emptyset \neq W \subseteq V$  halmaz **altér**  $V$ -ben, ha  $W$  a  $V$ -beli műveletek leszűkítésével és a  $V$ -beli nullvektorral valós vektorteret alkot.*

### Állítás

*Legyen  $V$  valós vektortér. A  $\emptyset \neq W \subseteq V$  halmaz pontosan akkor altér, ha az alábbi két tulajdonság teljesül rá:*

- *minden  $v, w \in W$  esetén  $v + w \in W$ ,*
- *minden  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $v \in W$  esetén  $\lambda \cdot v \in W$ .*

Nem bizonyítjuk. (Ld. [1] 4.2.2. Tétel.)

# Generált altér, lineáris függetlenség

## Definíció

Legyen  $V$  valós vektortér és  $(v_i)_{i \in I}$  egy  $V$ -beli rendszer. Ekkor a

$$\left\{ \sum_{j=1}^k \lambda_j v_{i_j} \mid k \in \mathbb{N}^+, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}, i_1, i_2, \dots, i_k \in I \right\}$$

halmazt, a  $(v_i)_{i \in I}$  vektorrendszer által **generált altérnek** nevezzük, és a

$$\langle v_i \mid i \in I \rangle$$

szimbólummal jelöljük.

## Definíció

Legyen  $V$  valós vektortér. Azt mondjuk, hogy a  $V$ -beli  $(v_i)_{i \in I}$  rendszer **lineárisan független**, ha tetszőleges  $k \in \mathbb{N}^+$ , valamint különböző  $i_1, i_2, \dots, i_k \in I$  indexek és  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  esetén

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j v_{i_j} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0.$$

# Generált altér, lineáris függetlenség

## Definíció

Legyen  $V$  valós vektortér és  $(v_i)_{i \in I}$  egy  $V$ -beli rendszer. Ekkor a

$$\left\{ \sum_{j=1}^k \lambda_j v_{i_j} \mid k \in \mathbb{N}^+, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}, i_1, i_2, \dots, i_k \in I \right\}$$

halmazt, a  $(v_i)_{i \in I}$  vektorrendszer által **generált altérnek** nevezzük, és a

$$\langle v_i \mid i \in I \rangle$$

szimbólummal jelöljük.

## Definíció

Legyen  $V$  valós vektortér. Azt mondjuk, hogy a  $V$ -beli  $(v_i)_{i \in I}$  rendszer **lineárisan független**, ha tetszőleges  $k \in \mathbb{N}^+$ , valamint különböző  $i_1, i_2, \dots, i_k \in I$  indexek és  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  esetén

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j v_{i_j} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0.$$

**Definíció**

*Legyen  $V$  valós vektortér. Azt mondjuk, hogy a  $B \subseteq V$  halmaz **bázisa**  $V$ -nek, ha a  $(v)_{v \in B}$  rendszer lineárisan független, és  $\langle v \mid v \in B \rangle = V$ .*

**Definíció**

*Azt mondjuk, hogy az  $E$  és  $F$  halmaz **azonos számosságú**, ha létezik  $E \rightarrow F$  bijekció.*

**Tétel**

*Minden vektortérnek létezik bázisa, és egy vektortér bármely két bázisa azonos számosságú.*

### Definíció

*Legyen  $V$  valós vektortér. Azt mondjuk, hogy a  $B \subseteq V$  halmaz **bázisa**  $V$ -nek, ha a  $(v)_{v \in B}$  rendszer lineárisan független, és  $\langle v \mid v \in B \rangle = V$ .*

### Definíció

*Azt mondjuk, hogy az  $E$  és  $F$  halmaz **azonos számosságú**, ha létezik  $E \rightarrow F$  bijekció.*

### Tétel

*Minden vektortérnek létezik bázisa, és egy vektortér bármely két bázisa azonos számosságú.*

### Definíció

Legyen  $V$  valós vektortér. Azt mondjuk, hogy a  $B \subseteq V$  halmaz **bázisa**  $V$ -nek, ha a  $(v)_{v \in B}$  rendszer lineárisan független, és  $\langle v \mid v \in B \rangle = V$ .

### Definíció

Azt mondjuk, hogy az  $E$  és  $F$  halmaz **azonos számosságú**, ha létezik  $E \rightarrow F$  bijekció.

### Tétel

Minden vektortérnek létezik bázisa, és egy vektortér bármely két bázisa azonos számosságú.

### Definíció

Azt mondjuk, hogy a  $V$  valós vektortér

- **véges dimenziós**, ha bármely bázisa véges,
- *végtelen dimenziós*, ha nem véges dimenziós.

### Definíció

Legyen  $V$  véges dimenziós valós vektortér. Ekkor  $V$  bármely bázisának elemszámát  $V$  **dimenziójának** nevezzük és  $\dim(V)$ -vel jelöljük.

### Definíció

Azt mondjuk, hogy a  $V$  valós vektortér

- **véges dimenziós**, ha bármely bázisa véges,
- **végtelen dimenziós**, ha nem véges dimenziós.

### Definíció

Legyen  $V$  véges dimenziós valós vektortér. Ekkor  $V$  bármely bázisának elemszámát  $V$  **dimenziójának** nevezzük és  $\dim(V)$ -vel jelöljük.

### Definíció

Azt mondjuk, hogy a  $V$  valós vektortér

- **véges dimenziós**, ha bármely bázisa véges,
- **végtelen dimenziós**, ha nem véges dimenziós.

### Definíció

Legyen  $V$  véges dimenziós valós vektortér. Ekkor  $V$  bármely bázisának elemszámát  $V$  **dimenziójának** nevezzük és  $\dim(V)$ -vel jelöljük.

## Példák

- 1 Ha  $n \in \mathbb{N}^+$ , akkor  $\mathbb{R}^n$  bármely altere (a "rég" definícióval) a szokásos vektorműveletekkel ellátva véges dimenziós, valós vektortér.
- 2 Ha  $k, n \in \mathbb{N}^+$  akkor  $\mathbb{R}^{k \times n}$  a mátrixösszeadással és a skalárral való szorzással véges dimenziós valós vektortér (az is belátható, hogy  $k \cdot n$  dimenziós).
- 3 Az  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  polinomfüggvények halmaza a pontonkénti összeadással és skalárral való szorzással végtelen dimenziós vektortér, amelyben az  $\left\{ \text{id}_{\mathbb{R}}^k \mid k \in \mathbb{N} \right\}$  függvényhalmaz bázis.
- 4 Ha  $H$  tetszőleges halmaz, akkor a  $H \rightarrow \mathbb{R}$  függvények halmaza a pontonkénti műveletekkel valós vektorteret alkot. Ha  $H$  végtelen, akkor ez a vektortér végtelen dimenziós.
- 5 A valós számsorozatok (vagyis az  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  függvények) halmaza a tagonkénti műveletekkel végtelen dimenziós valós vektortér.

## Példák

- ④ Ha  $n \in \mathbb{N}^+$ , akkor  $\mathbb{R}^n$  bármely altere (a "rég" definícióval) a szokásos vektorműveletekkel ellátva véges dimenziós, valós vektortér.
- ④ Ha  $k, n \in \mathbb{N}^+$  akkor  $\mathbb{R}^{k \times n}$  a mátrixösszeadással és a skalárral való szorzással véges dimenziós valós vektortér (az is belátható, hogy  $k \cdot n$  dimenziós).
- ④ Az  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  polinomfüggvények halmaza a pontonkénti összeadással és skalárral való szorzással végtelen dimenziós vektortér, amelyben az  $\left\{ \text{id}_{\mathbb{R}}^k \mid k \in \mathbb{N} \right\}$  függvényhalmaz bázis.
- ④ Ha  $H$  tetszőleges halmaz, akkor a  $H \rightarrow \mathbb{R}$  függvények halmaza a pontonkénti műveletekkel valós vektorteret alkot. Ha  $H$  végtelen, akkor ez a vektortér végtelen dimenziós.
- ④ A valós számsorozatok (vagyis az  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  függvények) halmaza a tagonkénti műveletekkel végtelen dimenziós valós vektortér.

## Példák

- 1 Ha  $n \in \mathbb{N}^+$ , akkor  $\mathbb{R}^n$  bármely altere (a "régi" definícióval) a szokásos vektorműveletekkel ellátva véges dimenziós, valós vektortér.
- 2 Ha  $k, n \in \mathbb{N}^+$  akkor  $\mathbb{R}^{k \times n}$  a mátrixösszeadással és a skalárral való szorzással véges dimenziós valós vektortér (az is belátható, hogy  $k \cdot n$  dimenziós).
- 3 Az  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  polinomfüggvények halmaza a pontonkénti összeadással és skalárral való szorzással végtelen dimenziós vektortér, amelyben az  $\left\{ \text{id}_{\mathbb{R}}^k \mid k \in \mathbb{N} \right\}$  függvényhalmaz bázis.
- 4 Ha  $H$  tetszőleges halmaz, akkor a  $H \rightarrow \mathbb{R}$  függvények halmaza a pontonkénti műveletekkel valós vektorteret alkot. Ha  $H$  végtelen, akkor ez a vektortér végtelen dimenziós.
- 5 A valós számsorozatok (vagyis az  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  függvények) halmaza a tagonkénti műveletekkel végtelen dimenziós valós vektortér.

## Példák

- 1 Ha  $n \in \mathbb{N}^+$ , akkor  $\mathbb{R}^n$  bármely altere (a "rég" definícióval) a szokásos vektorműveletekkel ellátva véges dimenziós, valós vektortér.
- 2 Ha  $k, n \in \mathbb{N}^+$  akkor  $\mathbb{R}^{k \times n}$  a mátrixösszeadással és a skalárral való szorzással véges dimenziós valós vektortér (az is belátható, hogy  $k \cdot n$  dimenziós).
- 3 Az  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  polinomfüggvények halmaza a pontonkénti összeadással és skalárral való szorzással végtelen dimenziós vektortér, amelyben az  $\left\{ \text{id}_{\mathbb{R}}^k \mid k \in \mathbb{N} \right\}$  függvényhalmaz bázis.
- 4 Ha  $H$  tetszőleges halmaz, akkor a  $H \rightarrow \mathbb{R}$  függvények halmaza a pontonkénti műveletekkel valós vektorteret alkot. Ha  $H$  végtelen, akkor ez a vektortér végtelen dimenziós.
- 5 A valós számsorozatok (vagyis az  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  függvények) halmaza a tagonkénti műveletekkel végtelen dimenziós valós vektortér.

## Példák

- ④ Ha  $n \in \mathbb{N}^+$ , akkor  $\mathbb{R}^n$  bármely altere (a "rég" definícióval) a szokásos vektorműveletekkel ellátva véges dimenziós, valós vektortér.
- ④ Ha  $k, n \in \mathbb{N}^+$  akkor  $\mathbb{R}^{k \times n}$  a mátrixösszeadással és a skalárral való szorzással véges dimenziós valós vektortér (az is belátható, hogy  $k \cdot n$  dimenziós).
- ④ Az  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  polinomfüggvények halmaza a pontonkénti összeadással és skalárral való szorzással végtelen dimenziós vektortér, amelyben az  $\left\{ \text{id}_{\mathbb{R}}^k \mid k \in \mathbb{N} \right\}$  függvényhalmaz bázis.
- ④ Ha  $H$  tetszőleges halmaz, akkor a  $H \rightarrow \mathbb{R}$  függvények halmaza a pontonkénti műveletekkel valós vektorteret alkot. Ha  $H$  végtelen, akkor ez a vektortér végtelen dimenziós.
- ④ A valós számsorozatok (vagyis az  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  függvények) halmaza a tagonkénti műveletekkel végtelen dimenziós valós vektortér.

## Lineáris leképezések, bijekciók

## Definíció

Legyenek  $V, W$  valós vektorterek. Az  $f: V \rightarrow W$  leképezés **lineárisnak** nevezzük, ha

- minden  $u, v \in V$  esetén  $f(u + v) = f(u) + f(v)$ ,
- minden  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $v \in V$  esetén  $f(\lambda \cdot v) = \lambda f(v)$ .

## Tétel

Legyenek  $V_1, V_2$  valós vektorterek, valamint  $B_1$  bázis  $V_1$ -ben,  $B_2$  bázis  $V_2$ -ben. Ekkor a következők ekvivalensek.

- Ⓐ  $B_1$  és  $B_2$  azonos számosságú.
- Ⓑ Létezik  $V_1 \rightarrow V_2$  lineáris bijekció.

## Következmény

Legyen  $V$  valós vektortér és  $n \in \mathbb{N}$ . Ekkor

$$\dim(V) = n \quad \Leftrightarrow \quad \text{létezik } V \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ lineáris bijekció.}$$

## Lineáris leképezések, bijekciók

## Definíció

Legyenek  $V, W$  valós vektorterek. Az  $f: V \rightarrow W$  leképezés **lineárisnak** nevezzük, ha

- minden  $u, v \in V$  esetén  $f(u + v) = f(u) + f(v)$ ,
- minden  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $v \in V$  esetén  $f(\lambda \cdot v) = \lambda f(v)$ .

## Tétel

Legyenek  $V_1, V_2$  valós vektorterek, valamint  $B_1$  bázis  $V_1$ -ben,  $B_2$  bázis  $V_2$ -ben. Ekkor a következők ekvivalensek.

- (i)  $B_1$  és  $B_2$  azonos számosságú.
- (ii) Létezik  $V_1 \rightarrow V_2$  lineáris bijekció.

## Következmény

Legyen  $V$  valós vektortér és  $n \in \mathbb{N}$ . Ekkor

$$\dim(V) = n \iff \text{létezik } V \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ lineáris bijekció.}$$

## Lineáris leképezések, bijekciók

## Definíció

Legyenek  $V, W$  valós vektorterek. Az  $f: V \rightarrow W$  leképezés **lineárisnak** nevezzük, ha

- minden  $u, v \in V$  esetén  $f(u + v) = f(u) + f(v)$ ,
- minden  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $v \in V$  esetén  $f(\lambda \cdot v) = \lambda f(v)$ .

## Tétel

Legyenek  $V_1, V_2$  valós vektorterek, valamint  $B_1$  bázis  $V_1$ -ben,  $B_2$  bázis  $V_2$ -ben. Ekkor a következők ekvivalensek.

- (i)  $B_1$  és  $B_2$  azonos számosságú.
- (ii) Létezik  $V_1 \rightarrow V_2$  lineáris bijekció.

## Következmény

Legyen  $V$  valós vektortér és  $n \in \mathbb{N}$ . Ekkor

$$\dim(V) = n \iff \text{létezik } V \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ lineáris bijekció.}$$

## Lineáris leképezések, bijekciók

## Definíció

Legyenek  $V, W$  valós vektorterek. Az  $f: V \rightarrow W$  leképezés **lineárisnak** nevezzük, ha

- minden  $u, v \in V$  esetén  $f(u + v) = f(u) + f(v)$ ,
- minden  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $v \in V$  esetén  $f(\lambda \cdot v) = \lambda f(v)$ .

## Tétel

Legyenek  $V_1, V_2$  valós vektorterek, valamint  $B_1$  bázis  $V_1$ -ben,  $B_2$  bázis  $V_2$ -ben. Ekkor a következők ekvivalensek.

- Ⓐ  $B_1$  és  $B_2$  azonos számosságú.
- Ⓑ Létezik  $V_1 \rightarrow V_2$  lineáris bijekció.

## Következmény

Legyen  $V$  valós vektortér és  $n \in \mathbb{N}$ . Ekkor

$$\dim(V) = n \quad \Leftrightarrow \quad \text{létezik } V \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ lineáris bijekció.}$$



Freud Róbert, *Lineáris algebra*, Eötvös Kiadó, (2009)



Kristóf János, *A matematikai analízis alapjai*, elektronikus jegyzet, (2019)  
<https://krja.hu/analyse/a0.pdf>



Kristóf János, *A matematikai analízis elemei 2*, elektronikus jegyzet, (2019)  
<https://krja.hu/analyse/a2.pdf>