1.

$$\int_V z\,\mathrm{d}(x,y,z) = ?$$

Ahol V az első térnyolcadba eső térrész, amelynek határai:

(a) a koordinátasíkok és az $x=2$, $y=3$, $z=4$ egyenletű síkok,

(b) a koordinátasíkok és az $x+2y+z=4$ egyenletű sík.

1. Definíció.

- *A $H \subseteq \mathbb{R}$ halmaz* 1-**dimenziós normáltartomány**, *ha kompakt intervallum.*
- *A $H \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ halmaz* $n+1$-**dimenziós normáltartomány**, *ha létezik olyan $H' \subseteq \mathbb{R}^n$ n-dimenziós normáltartomány, valamint $g,h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyekre minden $\underline{x} \in H'$ esetén $g(\underline{x}) \le h(\underline{x})$ teljesül, és*

$$H = \{(\underline{x}, y) \in H' \times \mathbb{R} \mid g(\underline{x}) \le y \le h(\underline{x})\}$$

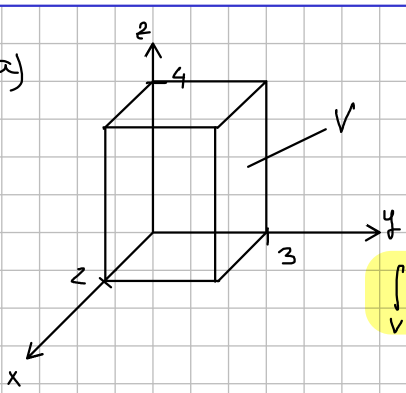
2. Tétel. **(Integrálás normáltartományon.)** *Legyen $n \ge 2$ és $H' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ $n-1$-dimenziós normáltartomány, továbbá $g,h : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyekre minden $\underline{x} \in H'$ esetén $g(\underline{x}) \le h(\underline{x})$ teljesül, és*

$$H := \{(\underline{x}, y) \in H' \times \mathbb{R} \mid g(\underline{x}) \le y \le h(\underline{x})\}$$

Ha az $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény folytonos a H halmazon, akkor f integrálható H-n, és

$$\int_H f = \int_{H'} \int_{g(\underline{x})}^{h(\underline{x})} f(\underline{x}, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\underline{x}.$$

a)

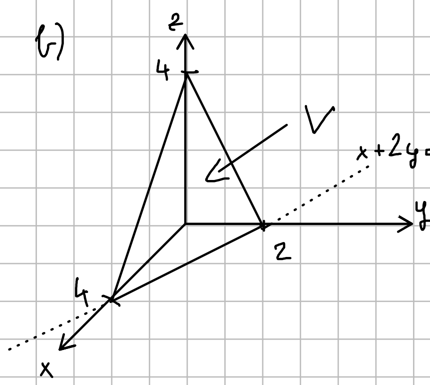


V tégla, integrandus folyt

⇓

$$\int_V z\,d(x,y,z) = \int_0^2\int_0^3\int_0^4 z\,dz\,dy\,dx = \int_0^2\int_0^3 \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^4 dy\,dv = \int_0^2 \underbrace{\int_0^3 8\,dy}_{3\cdot 8 = 24}\,dx = 2\cdot 24 = \underline{\underline{48}}$$

b)



sík: $x+2y+z=4$ metszéspontok a koo. tengelyekkel:

$y=z=0 \Rightarrow \boxed{x=4}$, $x=z=0 \Rightarrow \boxed{y=2}$, $x=y=0 \Rightarrow \boxed{z=4}$

$x+2y=4 \Leftrightarrow y = 2-\frac{x}{2}$

V normáltart., integrandus folyt V-n

$$\int_V z\,d(x,y,z) = \int_0^4\int_0^{2-\frac{x}{2}}\int_0^{4-x-2y} z\,dz\,dy\,dx = \int_0^4\int_0^{2-\frac{x}{2}}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{4-x-2y} dy\,dx =$$

$$= \int_0^4\int_0^{2-\frac{x}{2}} \frac{(4-x-2y)^2}{2}\,dy\,dx = \int_0^4 \left[\frac{(4-x-2y)^3}{-12}\right]_{y=0}^{2-\frac{x}{2}} dx = \int_0^4 \frac{(4-x)^3}{-12}\,dx =$$

$$= \left[\frac{(4-x)^4}{48}\right]_{x=0}^4 = \frac{16}{3}$$

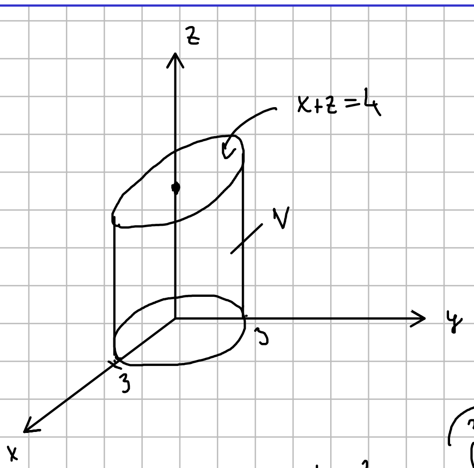
2.

$$\int_V 1\,\mathrm{d}(x,y,z) = ?$$

Ahol a V korlátos térrész határai: az $x^2+y^2=9$ egyenletű hengerfelület, valamint a $z=0$ és $x+z=4$ egyenletű síkok.

1. mo.:

$$\int_V 1\,d(x,y,z) \underset{V \text{ normáltart.}}{=} \int_{-3}^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \underbrace{\int_0^{4-x} 1\,dz}_{4-x}\,dy\,dx = (*)$$



$$V = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid -3 \le x \le 3,\ -\sqrt{9-x^2} \le y \le \sqrt{9+x^2},\ 0 \le z \le 4-x\right\}$$

$$(*) = \underbrace{\int_{-3}^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} 4\,dy\,dx}_{4\cdot \text{alapkör ter.}} - \int_{-3}^3 \underbrace{\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} x\,dy}_{2\sqrt{9-x^2}\cdot x}\,dx =$$

$$= 4\cdot 3^2\cdot\pi - \overbrace{\int_{-3}^3 \underbrace{2x\sqrt{9-x^2}}_{\text{páratlan}}\,dx}^{0} = \underline{\underline{36\pi}}$$

2. mo.:

$$V = \left\{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le r \le 3,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le z \le 4 - r\cos(\varphi)\right\}$$

$$\int_V 1\,d(x,y,z) \underset{\text{henger koo.}}{=} \int_0^3\int_0^{2\pi}\underbrace{\int_0^{4-r\cos(\varphi)} r\,dz}_{r(4-r\cos(\varphi))}\,d\varphi\,dr = \int_0^3\int_0^{2\pi} 4r - r^2\cos(\varphi)\,d\varphi\,dr =$$

$$= \int_0^3 8\pi r - r^2 \underbrace{\left[\sin(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{2\pi}}_{0}\,dr = 4\pi\left[r^2\right]_{r=0}^3 = \underline{\underline{36\pi}}$$

3.mo) $\int_V 1\, d(x,y,z) = \lambda(V)$ tükrözzük a hengert a $(0,0,4)$ pontra $\Rightarrow$ egy egyenes körhengert kapunk, amelynek magassága 8 $\Rightarrow$ térfogata: $8\cdot 3^2\pi = 72\pi$, az eredeti henger térfogata így $\frac{72\pi}{2} = 36\pi$

3.

$$\int_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, d(x,y,z) = ?$$

Ahol a V korlátos térrész határai: az $z = x^2+y^2$ egyenletű forgásparaboloid, valamint a $z=4$ egyenletű sík.

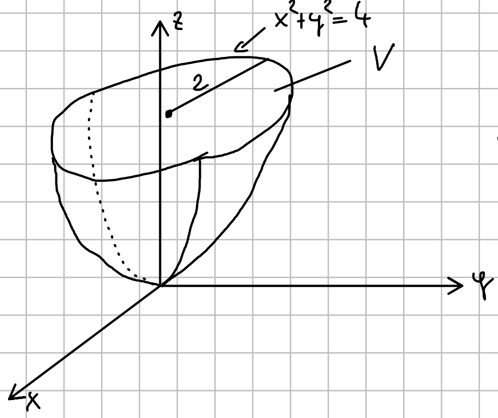
3. Tétel. (Henger koordinátázás.) *Legyen $A \subseteq \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi]\times\mathbb{R}$ Jordan-mérhető és*

$$\underline{C}: \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3;\quad (r,\varphi,z)\mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z).$$

Ha az $f:\mathbb{R}^3 \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény korlátos a $\underline{C}\langle A\rangle$ halmazon, akkor

$$\int_{\underline{C}\langle A\rangle} f(x,y)\,d(x,y) = \int_A f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)\, r\, d(r,\varphi,z),$$

abban az értelemben, hogy ha az egyik oldal létezik, akkor a másik is és egyenlőek.

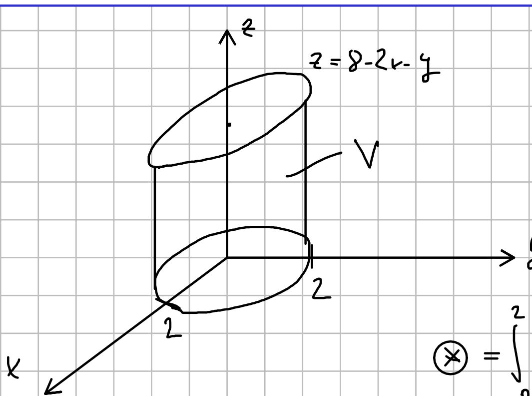


$$V = \{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le r\le 3,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ r^2\le z\le 4\}$$

$$\int_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, d(x,y,z) \underset{\text{henger koo.}}{=} \int_0^2\int_0^{2\pi}\underbrace{\int_{r^2}^4 \underbrace{\frac{1}{r}\cdot r}_{=1}\, dz}_{4-r^2}\, d\varphi\, dr =$$

$$= \int_0^2 2\pi(4-r^2)\,dr = 2\pi\Big(\underbrace{8-\Big[\frac{r^3}{3}\Big]_{r=0}^2}_{\frac{16}{3}}\Big) = \frac{32\pi}{3}$$

4. Számítsuk ki az $x^2+y^2=4$ egyenletű henger, valamint a $z=0$ és a $z=8-2x-y$ egyenletű síkok által határolt korlátos térrész térfogatát.



1.mo $\lambda(V) = \int_V 1 \underset{\text{henger koo.}}{=} \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^{8-2r\cos(\varphi)-r\sin(\varphi)} r\ dz\,d\varphi\,dr \overset{(*)}{=}$

$$V=\{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le r\le 2,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le z\le 8-2r\cos(\varphi)-r\sin(\varphi)\}$$

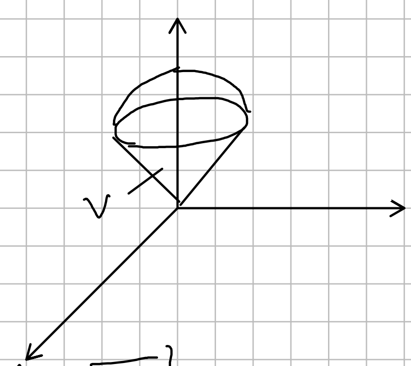
$$(*) = \int_0^2\int_0^{2\pi} 8r - 2r\cos(\varphi) - r\sin(\varphi)\, d\varphi\, dr = \int_0^2 16\pi r\, dr = 16\pi\Big[\frac{r^2}{2}\Big]_{r=0}^2 = 32\pi$$

2.mo $\lambda(V) = \int_V 1\, d(x,y,z) = \int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\underbrace{\int_0^{8-2x-y} 1\,dz}_{8-2x-y}\, dy\,dx = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 8-2x-y\ dy\,dx =$

$$= \int_{-2}^2 (8-2x)\cdot 2\cdot\sqrt{4-x^2} - \underbrace{\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \underbrace{y}_{\text{ptlan}}\,dy}_{=0}\, dx = 16\underbrace{\int_{-2}^2\sqrt{4-x^2}\,dx}_{\substack{\text{félkör ter.}\\ \frac{2^2\pi}{2}=2\pi}} - 4\underbrace{\int_{-2}^2 \underbrace{x\cdot\sqrt{4-x^2}}_{\text{ptlan}}\,dx}_{=0} = 32\pi$$

3.mo: Tükrözzük a hengert a $(0,0,8)$ pontra $\Rightarrow$ egy egyenes körhengert kapunk, amelynek magassága 16 $\Rightarrow$ térfogata: $16\cdot 2^2\pi = 64\pi$, az eredeti henger térfogata így $\frac{64\pi}{2} = 32\pi$

5. Számítsuk ki a $z=\sqrt{8-x^2-y^2}$ és a $z=\sqrt{x^2+y^2}$ egyenletű felületek által határolt korlátos térrész térfogatát.



1.mo $\left.\begin{aligned} z&=\sqrt{8-x^2-y^2}\\ z&=\sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}\right\}$ metszésvonal: $8-x^2-y^2 = x^2+y^2 \iff x^2+y^2=4$

$$\lambda(V) = \int_V 1 \underset{\text{henger koo.}}{=} \int_0^2\int_0^{2\pi}\underbrace{\int_r^{\sqrt{8-r^2}} r\,dz}_{=(\sqrt{8-r^2}-r)r}\,d\varphi\,dr = 2\pi\int_0^2 r\sqrt{8-r^2} - r^2\,dr = (*)$$

$$V=\{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le r\le 2,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ r\le z\le\sqrt{8-r^2}\}$$

$$(*) = 2\pi \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(8-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{2} = 2\pi\left(-\frac{1}{3}(8-16\sqrt{2}) - \frac{8}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}(16\sqrt{2}-16)$$

2. mo

$$\lambda(V) \underset{\text{gömbi koo.}}{=} \int_0^{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2\sin(\vartheta)\,d\vartheta\,d\varphi\,dr = 2\pi\int_0^{2\sqrt{2}} r^2\,dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(\vartheta)\,d\vartheta = 2\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{2\sqrt{2}} \cdot \left[-\cos(\vartheta)\right]_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= 2\pi\cdot\frac{16\sqrt{2}}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2\pi}{3}(16\sqrt{2}-16)$$

6. Legyen $V := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 9,\ x\le 0,\ y\ge 0,\ z\le 0\}$.

$$\int_V xy^2z^3\,\mathrm{d}(x,y,z) = ?$$

4. Tétel. (Gömbi koordinátázás.) *Legyen $A\subseteq\mathbb{R}_+\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$ Jordan-mérhető és*

$$\underline{S}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3;\quad (r,\theta,\varphi)\mapsto(r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta)).$$

Ha az $f:\mathbb{R}^3\rightarrowtail\mathbb{R}$ függvény korlátos az $\underline{S}\langle A\rangle$ halmazon, akkor

$$\int_{\underline{S}\langle A\rangle} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_A f(r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta))r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}(r,\theta,\varphi),$$

abban az értelemben, hogy ha az egyik oldal létezik, akkor a másik is és egyenlőek.

gömbi koo: $x\le 0,\ y\ge 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi$

$z\le 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2}\le\vartheta\le\pi$

$$\int_V xy^2z^3\,d(x,y,z) \underset{\text{gömbi koo.}}{=} \int_0^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (r\sin(\vartheta)\cos(\varphi))(r\sin(\vartheta)\sin(\varphi))^2(r\cos(\vartheta))^3 r^2\sin(\vartheta)\,d\vartheta\,d\varphi\,dr =$$

$$\int_0^3 r^8\,dr\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4(\vartheta)\overbrace{\cos^3(\vartheta)}^{\cos^2(\vartheta)\cdot\cos(\vartheta)}\,d\vartheta\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2(\varphi)\cos(\varphi)\,d\varphi \overset{(*)}{=} 3^6\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right) = \frac{3^6\cdot 2}{35}$$

$$(*)\begin{cases}\int_0^3 r^8\,dr = \left[\frac{r^9}{9}\right] = 3^7\\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4(1-\sin^2(\vartheta))\cos(\vartheta)\,d\vartheta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4(\vartheta)\cos(\vartheta)-\sin^6(\vartheta)\cos(\vartheta)\,d\vartheta = \left[\frac{\sin^5(\vartheta)}{5}-\frac{\sin^7(\vartheta)}{7}\right]_{\vartheta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{7}-\frac{1}{5}\\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2(\varphi)\cos(\varphi)\,d\varphi = \left[\frac{\sin^3(\varphi)}{3}\right]_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{1}{3}\end{cases}$$

7. Számoljuk ki a $V := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, 1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{3}}\le z\le\sqrt{x^2+y^2}\right\}$ térrész térfogatát.

gömbi koordinátákkal: $\boxed{1\le r\le 2}$

$$\frac{r\cdot\sin(\vartheta)}{\sqrt{3}}\le r\cos(\vartheta)\le r\sin(\vartheta) \;/:\sin(\vartheta)\ (\vartheta>0)\quad :r\ (\ge 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\le \operatorname{ctg}(\vartheta)\le 1 \iff \sqrt{3}\ge\operatorname{tg}(\vartheta)\ge 1 \iff \boxed{\frac{\pi}{4}\le\vartheta\le\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow \lambda(V) = \int_V 1 \underset{\text{gömbi koo.}}{=} \int_1^2\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} r^2\sin(\vartheta)\,d\vartheta\,d\varphi\,dr = \int_1^2 r^2\,dr\cdot 2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin(\vartheta)\,d\vartheta = \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=1}^{2}\cdot 2\pi\cdot\left[-\cos(\vartheta)\right]_{\vartheta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{14\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$