

Analízis 2 informatikusoknak (BME TE90AX57) tételsor

2026. május

Általános információk

- Az írásbeli vizsga egy tesztből és egy kifejtős kérdéssorból áll.
- Az írásbeli vizsgán csak a tárgyhonlapon található deriválttáblázat vagy az-
zal azonos információtartalmú táblázat használható, más segédeszköz (pl.
számológép) nem.
- Alapértelmezésként minden, a tananyagban előforduló definíciót és állítást
ismerni kell a vizsgán. Ezen kívül bizonyos tételek bizonyítását is tudni
kell ismertetni. Ezt pontosítja az alábbi tételsor. **A bizonyítással együtt
számonkért tételeket, állításokat vastag szedéssel jelöljük.**

Tételek

1. Függvénysorozatok, függvénysorok

Függvénysorozat fogalma, konvergencia-tartománya. Függvénysor fogalma, konvergencia-
tartománya.

2. Hatványsorok

Hatványsor fogalma, konvergenciája. Konvergencia-tartomány fogalma, alakja.
Konvergencia-sugár. Konvergencia-sugár meghatározása hányados- és gyökkritéri-
ummal. Elemi analitikus függvények tulajdonságai (folytonosság, tagonkénti deri-
válhatóság, a derivált konvergenciasugara, tagonkénti integrálhatóság).

Taylor polinom, Lagrange-maradéktagos Taylor-formula. Taylor-sor, hatvány-
sor együtthatóinak egyértelműsége. Analitikusság, a pontbeli analitikusság jellem-
zése. Nevezetes függvények hatványsor-előállításai (exp, sin, cos, ch, sh). Binomiális
sor.

3. Lineáris algebra I.

Skaláris szorzat, hossz térbeli vektorok esetén. Az egyenes egyenletrendszere, sík
egyenlete.

A lineáris algebra alapvető fogalmai \mathbb{R}^n -ben: altér, generált altér, generátor-
rendszer, lineáris függetlenség. **Egy vektorrendszer pontosan akkor lineá-
risan független, ha semelyik tagja sem áll elő a többi vektor lineáris
kombinációjának segítségével.**

Bázis fogalma. Altérbeli lineárisan független vektorrendszer kiegészíthető az altér egy bázisává. Minden altérnek létezik bázisa, és bármely két bázisa azonos elemszámú. **k -dimenziós altérben k -tagú lineárisan független vektorrendszer bázis, $k+1$ -tagú vektorrendszer lineárisan összefüggő. \mathbb{R}^n dimenziója n . Bázis jellemzése: minden altérbeli vektor egyértelműen áll elő a bázis tagjainak lineáris kombinációjaként.**

4. Lineáris algebra II.

Mátrixok: négyzetes, diagonális, alsó- és felső háromszögmátrix fogalma. Mátrixműveletek: összeadás, számmal szorzás. Mátrixok szorzása, transzponálás, műveletei tulajdonságok.

Permutációk: cserék, paritás, inverziószám. A determináns definíciója. A determináns tulajdonságai: felső háromszögmátrix determinánsa, az elemi sorkvivalens átalakítások kapcsolata a determinánssal, transzponált determinánsa, 2×2 -es mátrix determinánsa. Kifejtési tétel.

Vektoriális szorzat és kiszámítása determináns segítségével.

A determinánsok szorzástétele.

Lineáris egyenletrendszerek: együtthatómátrix és kibővített együtthatómátrix. Elemi sorkvivalens átalakítások. Gauss-elimináció. Lineáris egyenletrendszerek és determináns.

5. Lineáris algebra III.

Inverz mátrix. **Egy négyzetes mátrixnak pontosan akkor létezik inverze, ha a determinánsa nem nulla.** Invertálás Gauss-elimináció segítségével.

Lineáris leképezések. **Egy leképezés pontosan akkor lineáris, ha mátrixszal való szorzás.** Lineáris leképezés mátrixa. **Lineáris leképezések kompozíciója, és a kompozíció mátrixa.** Magtér, képtér, dimenziótétel.

Sajátérték és sajátvektor fogalma. Karakterisztikus polinom. **Négyzetes mátrix sajátértékei a karakterisztikus polinom gyökei.**

Lineáris algebra vektorterekben: a definíciókat/tételeket nem kell tudni kimondani, csak használni őket. (Pl. vektorteret alkot-e ...?)

6. Differenciálegyenletek (d.e.) bevezetése, elsőrendű d.e.-ek

Differenciálegyenlet fogalma, osztályozásuk. Általános megoldás, partikuláris megoldás, kezdetiérték-feladat. Szétválasztható változójú d.e.-ek megoldása. Elsőrendű lineáris d.e.-ek. **Az elsőrendű homogén lineáris d.e.-ek megoldásai. Az elsőrendű inhomogén lineáris d.e.-nek létezik megoldása. Elsőrendű inhomogén lineáris d.e. általános megoldásának alakja.** konstans variáció módszer. Új változó bevezetése (spec.: $u = y/x$ és $u = ax + by$). Vonalelem, iránymező. Partikuláris megoldás lokális vizsgálata a d.e.-hez tartozó iránymezőben.

Egzisztencia és unicitás (az ide vonatkozó tételeket nem kell tudni kimondani): példa olyan differenciálegyenletre, amelynek adott kezdeti feltétel mellett nem egyértelmű a megoldása.

7. Magasabbrendű lineáris d.e.-ek

Lineáris d.e. fogalma. (Állandó/függvény-együtthatós, homogén/inhomogén.) Az n -edrendű homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásai n -dimenziós vektorteret alkotnak. **Az n -edrendű homogén lineáris, konstans együtthatós differenciálegyenletnek létezik $x \mapsto e^{\lambda x}$ alakú megoldása.** Karakterisztikus polinom. Az általános megoldás alakja.

Az n -edrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldásának alakja. Az n -edrendű inhomogén lineáris d.e. partikuláris megoldásának keresése speciális jobb oldali zavaró függvény esetén próbafüggvénnyel. Külső rezonancia.

8. Laplace-transzformáció

A $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ függvényhalmaz és a Laplace-transzformált definíciója. Nevezetes függvények Laplace-transzformáltja. A Laplace transzformáció linearitása és egyéb tulajdonságai. Egyértelműségi tétel.

Alkalmazás differenciálegyenletek megoldására.

9. Többváltozós függvények határértéke és deriválása

Többváltozós függvények értelmezése, grafikon, szemléltetésük. Távolság, környezet fogalma; belső-, külső-, határpont, torlódási pont, zárt és nyílt halmazok, kompakt halmaz, korlátos halmaz. Pontsorozat és konvergenciája.

Többváltozós függvények határértéke és folytonossága. **Összetett függvények és függvénykompozíció folytonossága.**

Kompakt halmaz folytonos függvény általi képe kompakt, **Weierstrass-tétel.** Összefüggőség, Bolzano-tétel és ennek egy **következménye.**

Parciális derivált fogalma. A totális derivált, gradiensvektor. A totális derivált létezésének szükséges feltételei. Egy elégséges feltétel.

10. A deriválás alkalmazásai

Totálisan deriválható függvény érintősíkjá, **iránymenti derivált és kiszámítása.** Gradiensvektor tulajdonságai. Melyik irányban legnagyobb ill. legkisebb az iránymenti derivált és mekkora?

Vektorértékű függvények deriválása, függvénykompozíció deriváltja. $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvények másodrendű parciális deriváltjai és második deriváltja. Young-tétel.

Lokális szélsőérték definíciója, **létezésének szükséges feltétele.** Szimmetrikus mátrixok definitiségének értelmezése. A lokális szélsőérték elégséges feltétele kétváltozós függvényekre. Abszolút szélsőérték fogalma, meghatározása.

11. Többváltozós függvények integrálása

Integrálás téglalapon. Az integrál értelmezése. Kiszámítása a Fubini-tétellel. Elégséges feltétel az integrál létezésére. Jordan-mérhetőség és Jordan-mérték. Normáltartományok és az integrál kiszámítása normáltartományon. Kettősintegrál transzformációja. Síkbeli polár koordinátarendszer, és **Jacobi-determinánsa.** Háromsintegrál kiszámítása téglalaton, normáltartományon és helyettesítéssel (gömbi ill. hengerkoordináták, és **Jacobi-determinánsuk**).