

1. feladat (6+6=12 pont)

Legyen

$$f(x, y) := 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x - 4y + 7 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

- a) Számítsuk ki f origóbeli iránymenti deriváltjainak maximumát, és adjuk meg azt a vektort, amely mentén maximális az iránymenti derivált.
- b) Határozzuk meg az f függvény $(0, 0)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét.
-

Mo. a) Minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\partial_1 f(x, y) = 4x - 2y - 4 \quad (1\text{p}) \quad \partial_2 f(x, y) = 4y - 2x - 4 \quad (1\text{p})$$

Az f függvény differenciálható az origóban, ezért az origóbeli iránymenti deriváltak maximuma $\|\text{grad}f(0, 0)\|$ (1p), azaz

$$\|\text{grad}f(0, 0)\| \stackrel{(1\text{p})}{=} \|(-4, -4)\| \stackrel{(1\text{p})}{=} 4\sqrt{2},$$

és a pontbeli gradiens irányában vétetik fel a maximum, vagyis az $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1)$ vektoron (1p).

b) Az érintősík egy normálvektora:

$$(\partial_1 f(0, 0), \partial_2 f(0, 0), -1) = (-4, -4, -1) \quad (2\text{p}),$$

egy pontja:

$$(0, 0, f(0, 0)) = (0, 0, 7) \quad (2\text{p}),$$

tehát az érintősík egyenlete

$$-4x - 4y - z + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x + 4y + z = 7 \quad (2\text{p}).$$

* 2. feladat (12+12=24 pont)

a)

$$\int_0^1 \int_y^1 \operatorname{sh}(x^2) \, dx \, dy = ?$$

b) Számítsuk ki az $\int_H f$ integrál értékét, ahol

$$f(x, y, z) := \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3),$$

$$H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0\}.$$

Mo. a)

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\} \stackrel{(2p)}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

H normáltartomány, az integrandus folytonos H -n (1p), tehát

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_y^1 \operatorname{sh}(x^2) \, dx \, dy &\stackrel{(1p)}{=} \int_H \operatorname{sh}(x^2) \, d(x, y) \stackrel{(3p)}{=} \int_0^1 \int_0^x \operatorname{sh}(x^2) \, dy \, dx \stackrel{(2p)}{=} \\ &= \int_0^1 x \operatorname{sh}(x^2) \, dx \stackrel{(2p)}{=} \left[\frac{\operatorname{ch}(x^2)}{2} \right]_{x=0}^1 \stackrel{(1p)}{=} \frac{1}{2} (\operatorname{ch}(1) - 1) = \frac{1}{4} \left(e + \frac{1}{e} - 2 \right). \end{aligned}$$

b)

Gömbi koordinátákkal (1p):

$$\int_H f \stackrel{(5p)}{=} \int_1^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{r} \cdot r^2 \sin(\theta) \, d\theta \, d\varphi \, dr \stackrel{(3p)}{=} 2\pi \int_1^3 2r \, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta) \, d\theta \stackrel{(2p)}{=} 2\pi [r^2]_{r=1}^3 [-\cos(\theta)]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \stackrel{(1p)}{=} 16\pi$$

3. feladat (4+10=14 pont)

Mondjuk ki és bizonyítsuk a lokális szélsőértékek létezésének szükséges feltételéről szóló tételt ($\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény esetre).

Mo. Tétel. Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, és $\underline{a} \in \operatorname{int}(\operatorname{Dom}(f))$. Ha f totálisan differenciálható \underline{a} -ban, és f -nek lokális szélsőértéke van \underline{a} -ban, akkor $\operatorname{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}$. (4p)

Bizonyítás. Legyen $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, valamint \underline{e}_i az i -edik standard bázisvektor \mathbb{R}^n -ben, és jelölje φ azt a függvényt, amelyre

$$\operatorname{Dom}(\varphi) := \{t \in \mathbb{R} \mid \underline{a} + t\underline{e}_i \in \operatorname{Dom}(f)\} \quad \text{és} \quad \varphi(t) := f(\underline{a} + t\underline{e}_i) \quad (t \in \operatorname{Dom}(\varphi)). \quad (3p)$$

Ekkor φ -nek lokális szélsőértéke van a 0 pontban (2p), és itt differenciálható (1p), tehát $\varphi'(0) = 0$ (1p). Ugyanakkor $\varphi'(0) = \partial_i f(\underline{a})$ (2p). Mivel i tetszőleges volt ezért $\operatorname{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}$ is teljesül (1p).