1. feladat (12 pont)
Legyen

$$f(x,y) := 2x^2 + 5y^2 - 4xy - 4x - 2y + 5 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)\,.$$

Határozzuk meg f lokális szélsőértékehelyeit és ezek típusát.

Mo. Minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\partial_1 f(x,y) = 4x - 4y - 4 \quad (\mathbf{1p}) \qquad \partial_2 f(x,y) = 10y - 4x - 2 \quad (\mathbf{1p})$$

$$\left.\begin{aligned} 4x - 4y &= 4 \\ -4x + 10y &= 2 \end{aligned}\right\} \quad (\mathbf{2p}) \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = (2,1) \quad (\mathbf{2p}),$$

és f a sík minden pontjában differenciálható, tehát csak a fenti pontban lehet lokális szélsőértéke. Minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén (f másodrendű parciális deriváltjai a sík minden pontjában folytonosak)

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{3p}),$$

azaz $f''(2,1)$ pozitív definit (pl. főminorokkal indokolva) **(2p)**, tehát f-nek a $(2,1)$ pontban lokális minimuma van **(1p)**.

---

2. feladat (12+12=24 pont)
Számítsuk ki az $\int\limits_H f$ integrál értékét, ahol

a)

$$f(x,y) := \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \left((x,y)\in\mathbb{R}^2\right),$$
$$H := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ 0 \le x \le y\}.$$

b)

$$f(x,y,z) := 2y \qquad \left((x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right)$$

$H \subseteq \mathbb{R}^3$ pedig azon korlátos térrész, amelyet a koordinátasíkok, valamint az $x=2$, $y=3$ és $z=x+1$ egyenletű síkok határolnak.

Mo. a)

$$H = \left\{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \;\middle|\; 1 \le r \le 2,\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\varphi}{2}\right\}, \quad (\mathbf{4p}).$$

Polárkordinátákkal **(1p)** :

$$\int\limits_H f \overset{(\mathbf{2p})}{=} \int\limits_1^2 \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r\cos(\varphi)}{r}\cdot r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \overset{(\mathbf{2p})}{=} \int\limits_1^2 r\,\mathrm{d}r \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \overset{(\mathbf{2p})}{=} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=1}^2 [\sin(\varphi)]_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

b) $H = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3,\ 0 \le z \le x+1\}$ $(\mathbf{2p})$. H normáltartomány, az integrandus folytonos H-n **(1p)** , tehát

$$\int\limits_H f \overset{(\mathbf{2p})}{=} \int\limits_0^2 \int\limits_0^3 \int\limits_0^{x+1} 2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \int\limits_0^2 \int\limits_0^3 2y(x+1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \int\limits_0^2 x+1\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_0^3 2y\,\mathrm{d}y \overset{(\mathbf{2p})}{=}$$
$$= \left[\frac{(x+1)^2}{2}\right]_{x=0}^2 \left[y^2\right]_{y=0}^3 \overset{(\mathbf{1p})}{=} 36.$$

---

3. feladat (6+8=14 pont)
Mondjuk ki és bizonyítsuk a polártanszformációról szóló tételt (kérváltozós függvények integrálásval kapcsolatban).

Mo. *Tétel.* Legyen $A \subseteq [0, +\infty[\times[0, 2\pi]$ Jordan-mérhető **(1p)** , és

$$\underline{P} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \quad (r, \varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\,.(\mathbf{1p})$$

Ha az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény korlátos a $\underline{P}\langle A\rangle$ halmazon **(1p)** , akkor

$$\int\limits_{\underline{P}\langle A\rangle} f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \int\limits_{A} f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))r\,\mathrm{d}(r, \varphi), (\mathbf{3p})$$

abban az értelemben, hogy ha az egyik oldal létezik, akkor a másik is és egyenlőek.

Bizonyítás. A $\underline{P}$ függvény a $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ halmazon injektív **(1p)** , továbbá folytonosan differenciálható $\mathbb{R}^2$-en **(1p)** , és minden $r, \varphi \in \mathbb{R}$ esetén

$$\underline{P}'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}, (\mathbf{4p})$$

tehát $\det \underline{P}'(r, \varphi) = r$ **(2p)** , így az integráltranszformációs tétel alapján adódik a tétel állítása.
