

\* 1. feladat (12 pont)

Legyen

$$f(x, y) := x^3 + y^3 - 3xy \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Határozzuk meg  $f$  lokális szélsőértékeit és ezek típusát.

---

Mo. Minden  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  esetén

$$\partial_1 f(x, y) = 3x^2 - 3y \quad (1\text{p}) \quad \partial_2 f(x, y) = 3y^2 - 3x \quad (1\text{p})$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{array} \right\} (1\text{p}) \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) \in \{(0, 0), (1, 1)\} \quad (2\text{p}),$$

és  $f$  a sík minden pontjában differenciálható, tehát csak a fenti két pontban lehet lokális szélsőértéke. Minden  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  esetén ( $f$  másodrendű parciális deriváltjai a sík minden pontjában folytonosak)

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} \quad (1\text{p}),$$

tehát

$$f''(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad f''(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \quad (2\text{p}),$$

azaz  $f''(0, 0)$  indefinit,  $f''(1, 1)$  pozitív definit (pl. főminorokkal indokolva) (2p), következésképpen az origóban nincs lokális szélsőértéke  $f$ -nek, az  $(1, 1)$  pontban pedig lokális minimuma van (2p).

---

## \* 2. feladat (12+12=24 pont)

Számítsuk ki az  $\int_H f$  integrál értékét, ahol

a)

$$f(x, y) := 4x \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

$H$  pedig az  $y = 2x^2 - x$  és  $y = x^2 + 2x$  egyenletű alakzatok által határolt korlátos tartomány.

b)

$$f(x, y, z) := \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3),$$

$$H := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3\sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$

Mo. a) Metszéspontok:

$$2x^2 - x = x^2 + 2x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 3\} \quad (2\text{p}).$$

Pl. 1-et behelyettesítve:  $2 \cdot 1^2 - 1 = 1 < 3 = 1^2 + 2 \cdot 1$  (1p), azaz

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3, 2x^2 - x \leq y \leq x^2 + 2x\} \quad (2\text{p}).$$

$H$  normáltartomány, az integrandus folytonos  $H$ -n (1p), tehát

$$\int_H f \stackrel{(1\text{p})}{=} \int_0^3 \int_{2x^2-x}^{x^2+2x} 4x \, dy \, dx \stackrel{(2\text{p})}{=} \int_0^3 4x(3x - x^2) \, dx \stackrel{(2\text{p})}{=} [4x^3 - x^4]_{x=0}^3 \stackrel{(1\text{p})}{=} 27.$$

b)

$$H = \{(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 3r\} \quad (3\text{p}),$$

Hengerkoordinátákkal (1p):

$$\int_H f \stackrel{(2\text{p})}{=} \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{3r} \frac{2}{r} \cdot r \, dz \, d\varphi \, dr \stackrel{(1\text{p})}{=} \int_1^2 \int_0^{2\pi} 6r \, dz \, d\varphi \, dr \stackrel{(1\text{p})}{=} 12\pi \int_1^2 r \, dr \stackrel{(2\text{p})}{=} 12\pi \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{r=1}^2 \stackrel{(2\text{p})}{=} 18\pi.$$

**3. feladat (4+10=14 pont)**

Mondjuk ki és bizonyítsuk bázisok jellemzéséről szóló tételt.

---

*Mo. Tétel.* Legyen  $V$  egy  $\mathbb{R}^n$ -beli altér **(1p)**, és  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$  egy  $V$ -beli vektorrendszer **(1p)**. Ekkor a következő állítások ekvivalensek.

- (i) A  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$  vektorrendszer bázis  $V$ -ben. **(1p)**
- (ii) Minden  $V$ -beli vektor egyértelműen írható fel a  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$  vektorrendszer lineáris kombinációjaként. **(1p)**

*Bizonyítás.* (i)  $\Rightarrow$  (ii): Mivel  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$  bázis  $V$ -ben, ezért generátorrendszer is  $V$ -ben, tehát minden  $V$ -beli vektor felírható ezen rendszer lineáris kombinációjaként **(2p)**. Az egyértelműség belátásához legyen  $\underline{v} \in V$ , és tegyük fel, hogy  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , továbbá  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  olyan valós számok, amelyekre

$$\begin{aligned}\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k &= \underline{v} \\ \mu_1 \underline{v}_1 + \mu_2 \underline{v}_2 + \dots + \mu_k \underline{v}_k &= \underline{v} \quad \mathbf{(2p)}\end{aligned}$$

Ekkor

$$(\lambda_1 - \mu_1) \underline{v}_1 + (\lambda_2 - \mu_2) \underline{v}_2 + \dots + (\lambda_k - \mu_k) \underline{v}_k = \underline{0} \quad \mathbf{(1p)},$$

tehát a vektorrendszer lineáris függetlensége **(1p)** alapján

$$\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2 \dots \lambda_k = \mu_k \quad \mathbf{(1p)}$$

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Ha (ii) teljesül  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ -ra, akkor azonnal adódik, hogy generátorrendszer  $V$ -ben **(1p)**; a lineáris függetlenséget pedig onnan kapjuk, hogy a  $\underline{0}$  vektor is egyértelműen írható fel a vektorrendszer lineáris kombinációjaként, tehát csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő a nullvektort **(2p)**.

---