

1. feladat (8+12=20 pont)

Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergensek az alábbi sorok?

$$a) \sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{n!(x+1)^n}{3^n} \qquad b) \sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{n}{4^n} (x+1)^{2n}$$

Mo. a) Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $a_n := \frac{n!}{3^n}$. Ekkor

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \stackrel{(2P)}{=} \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \frac{3^n}{n!} = \frac{n+1}{3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad (2P),$$

tehát $R_a = 0$ (2P), azaz csak $x = -1$ esetén konvergens a sor (2P)

b) Legyen $u := (x+1)^2$ (3P), és vizsgáljuk a $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{4^n} u^n$ sor konvergenciáját. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $b_n := \frac{n}{4^n}$.

Mivel

$$\sqrt[n]{b_n} \stackrel{(2P)}{=} \frac{\sqrt[n]{n}}{4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4}, \quad (2P)$$

ezért $R_b = 4$ (1P), tehát az eredeti sor $|x+1| < 2$ esetén konvergens (1P), $x = -3, 1$ esetén pedig divergens (2P), azaz pontosan akkor konvergens ha $x \in]-3, 1[$ (1P).

2. feladat (10+10=20 pont)

Határozzuk meg az alábbi függvények $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorfejtését, a Taylor-sor konvergenciasugarát, valamint az $f^{(100)}(0)$ és $g^{(99)}(0)$ deriváltakat.

$$a) f(x) := \frac{1}{2+x^3} \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad b) g(x) := \sqrt{2+x^3} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Mo. a)

$$f(x) \stackrel{(2P)}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{x^3}{2}\right)} \stackrel{(2P)}{=} \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^3}{2}\right)^n \stackrel{(2P)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}}_{a_{3n}} x^{3n},$$

ahol a (*) egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $|x| < \sqrt[3]{2}$ (1P), tehát f (0 középpontú) Taylor-sorának konvergenciasugara $\sqrt[3]{2}$ (1P).

$$f^{(100)}(0) \stackrel{(1P)}{=} a_{100} \cdot 100! \stackrel{(1P)}{=} 0.$$

b)

$$g(x) \stackrel{(2P)}{=} \sqrt{2} \cdot \left(1 + \frac{x^3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \stackrel{(3P)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sqrt{2} \binom{\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{2^n}}_{b_{3n}} x^{3n},$$

ahol az utolsó egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $|x|^3 < 2$ (1P), tehát a Taylor-sor konvergenciasugara $\sqrt[3]{2}$ (1P), illetve

$$g^{(99)}(0) \stackrel{(1P)}{=} b_{99} \cdot 99! \stackrel{(2P)}{=} \sqrt{2} \binom{\frac{1}{2}}{33} \frac{99!}{2^{33}}.$$

3. feladat (6+10+4=20 pont)

a) Definiáljuk a lineáris függetlenség fogalmát.

b) Az \mathbb{R}^n -beli $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorrendszer lineárisan független. Igaz-e, hogy ekkor az

$$\underline{a}, 2\underline{b} + 3\underline{c}, \underline{a} + \underline{b} + 5\underline{c}$$

vektorrendszer is lineárisan független?

c) Bázisa-e \mathbb{R}^3 -nak a $\underline{v}_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_2 := \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_3 := \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ vektorrendszer?

Mo. a) Az \mathbb{R}^n -beli v_1, v_2, \dots, v_k vektorrendszert lineárisan függetlennek nevezzük, ha

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = \underline{0}$$

csak a $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ esetben fordulhat elő **(6p)**.

b) Legyenek $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy

$$\lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 (2\underline{b} + 3\underline{c}) + \lambda_3 (\underline{a} + \underline{b} + 5\underline{c}) = \underline{0} \quad \text{(2p)}.$$

Ekkor

$$(\lambda_1 + \lambda_3) \underline{a} + (2\lambda_2 + \lambda_3) \underline{b} + (3\lambda_2 + 5\lambda_3) \underline{c} = \underline{0} \quad \text{(2p)},$$

így az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ rendszer lineáris függetlensége miatt

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \quad \text{(1p)}, \\ 3\lambda_2 + 5\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

amiből (megoldva az egyenletrendszert) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ **(3p)**, tehát a vektorrendszer lineárisan független **(2p)**.

c) Nem, mert $\underline{v}_3 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$ **(2p)**, azaz lineárisan összefüggő a vektorrendszer **(2p)**, így nem alkothat bázist semmilyen altérben.

4. feladat (10+10=20 pont)

Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsát.

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Mo. A első sora szerint kifejtve **(1p)**

$$\det(A) \stackrel{(4p)}{=} - \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 3 \det \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{(4p)}{=} -2 + 3(2+2) \stackrel{(1p)}{=} 10.$$

Az első sor megfelelő számszorosait levonva a többiből **(2p)**

$$\det(B) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 6 \end{bmatrix} \stackrel{(6p)}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{(2p)}{=} 1.$$

5. feladat (20 pont)

Adjuk meg az alábbi egyenletrendszer összes megoldását.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Mo. a) Gauss-eliminációval **(1p)**

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \stackrel{(4p)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{array} \right] \stackrel{(2p)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{array} \right] \stackrel{(2p)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array} \right] \\ & \stackrel{(2p)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \stackrel{(4p)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \stackrel{(2p)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right], \end{aligned}$$

tehát az egyetlen megoldás: $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$ **(3p)**.

6. feladat (plusz 10 pontért)

Bizonyítsuk be, hogy ha $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\det(A) \neq 0$, akkor létezik olyan $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, hogy $AX = B$.

Mo. 1. megoldás Jelölje a B mátrix j -edik oszlopát $\underline{b}_j \in \mathbb{R}^n$ ($j = 1, \dots, n$) **(2p)**. A $\det(A) \neq 0$ feltétel miatt **(1p)** minden $j \in \{1, \dots, n\}$ esetén (egyértelműen) létezik olyan $\underline{x}_j \in \mathbb{R}^n$, amelyre $A\underline{x}_j = \underline{b}_j$ teljesül **(3p)**. Legyen X az az $n \times n$ -es mátrix, amelynek j -edik oszlopa \underline{x}_j ($j = 1, \dots, n$) **(2p)**. Ekkor a mátrixszorzás definíciója alapján $AX = B$ teljesül **(2p)**.

2. megoldás A $\det(A) \neq 0$ feltétel miatt A -nak létezik inverze **(3p)**, akkor az $X := A^{-1}B$ **(2p)** választással

$$AX = A(A^{-1}B) \stackrel{(2p)}{=} (AA^{-1})B \stackrel{(2p)}{=} I_n \stackrel{(1p)}{=} B.$$
