

1. feladat (14+6=20 pont)

a) Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens az alábbi sor?

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{n(2x+4)^n}{6^n}$$

b) Adjuk meg az alábbi összeget zárt alakban.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}$$

Mo. a) $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{n(2x+4)^n}{6^n} = \sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{n}{3^n} (x+2)^n$ **(3p)**. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $a_n := \frac{n}{3^n}$. Ekkor

$$\sqrt[n]{|a_n|} \stackrel{(2p)}{=} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \quad (2p),$$

tehát $R_a = 3$ **(2p)**, azaz minden $x \in]-5, 1[$ esetén konvergens a sor **(2p)** ($x \in \mathbb{R} \setminus]-5, 1[$ esetén pedig divergens).

Vizsgáljuk meg az intervallum végpontjait:

- $x = -5$ esetén a $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} (-1)^n n$ divergens **(1p)**,
- $x = 1$ esetén a $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} n$ sor divergens **(1p)**,

tehát összegezve: a sor pontosan akkor konvergens, ha $x \in]-5, 1[$ **(1p)**.

b) Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén **(2p)**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!} \stackrel{(2p)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^{2n}}{(2n)!} \stackrel{(2p)}{=} \text{ch}(\sqrt{2})$$

2. feladat (10+10=20 pont)

Határozzuk meg az alábbi függvények $x_0 = -1$ körüli Taylor-sorfejtését, valamint a Taylor-sor konvergenciasugarát és konvergenciatartományát.

$$a) f(x) := \frac{1}{2+x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}) \qquad b) g(x) := e^{3x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Mo. a)

$$f(x) \stackrel{(2p)}{=} \frac{1}{1 - (-(x+1))} \stackrel{(2p)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-(x+1))^n \stackrel{(2p)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n,$$

ahol a (*) egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $|x+1| < 1$ **(2p)**, tehát f (-1) középpontú Taylor-sorának konvergenciasugara 1 **(1p)**, konvergenciatartománya pedig $]-2, 0[$ **(1p)**.

(0 körüli Taylor-sorfejtésért az a) részre járó pontokból legfeljebb 6 pont adható.)

b) Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén **(1p)**

$$g(x) = e^{3x} \stackrel{(2p)}{=} e^{-3} e^{3(x+1)} \stackrel{(3p)}{=} e^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3(x+1))^n}{n!} \stackrel{(2p)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{e^3 \cdot n!} (x+1)^n,$$

tehát a Taylor sor konvergenciasugara $+\infty$ **(1p)**, konvergenciatartománya pedig \mathbb{R} **(1p)**.

(0 körüli Taylor-sorfejtésért a b) részre járó pontokból legfeljebb 5 pont adható.)

3. feladat (6+10+4=20 pont)

- a) Definiáljuk a bázis fogalmát.
b) Bázist alkotnak-e \mathbb{R}^3 -ban az alábbi vektorrendszerek?

bi)

$$\underline{u} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \underline{v} := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{w} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bii)

$$\underline{u} := \begin{bmatrix} e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{v} := \begin{bmatrix} \pi \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{w} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mo. a) A $V \subseteq \mathbb{R}^n$ altér **bázisának** nevezzük a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ vektorrendszert, ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ generátorrendszere V -nek, és lineárisan független. **(6p)**

bii) Mivel $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, ezért elég belátnunk a vektorrendszerről, hogy lineárisan független **(2p)**.
Legyenek $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy

$$\lambda_1 \underline{u} + \lambda_2 \underline{v} + \lambda_3 \underline{w} = \underline{0}. \quad \mathbf{(2p)}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \quad \mathbf{(2p)}, \\ 2\lambda_1 &= 0 \end{aligned}$$

amiből $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ **(2p)**, tehát a vektorrendszer lineárisan független **(2p)**.

bii) Egy nullvektort tartalmazó vektorrendszer lineárisan összefüggő, ezért nem lehet bázis \mathbb{R}^3 -ban. **(4p)**

4. feladat (8+8=16 pont)

Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsát.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mo. A utolsó oszlopa szerint kifejtve **(1p)**

$$\det(A) \stackrel{\mathbf{(3p)}}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \stackrel{\mathbf{(3p)}}{=} -2 - 2 \stackrel{\mathbf{(1p)}}{=} -4.$$

B determinánsát a definíció alapján számolhatjuk ki **(2p)**. Az egyetlen nemnulla taghoz tartozó permutáció:

$$\pi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{(2p)}$$

$\text{inv}(\pi) = 3$ **(2p)**, tehát

$$\det(B) = (-1)^3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6 \quad \mathbf{(2p)}.$$

(alternatív megoldás: kifejtési tétellel)

5. feladat (16+8=24 pont)

a) Adjuk meg a következő egyenletrendszer összes megoldását.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 9x_2 - x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

b) Legyen $B := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. $B^{2026} = ?$

Mo. a) Gauss-eliminációval

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 9 & -1 & 1 & 4 \end{array} \right] \stackrel{(6p)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right] \stackrel{(3p)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ & & & & \end{array} \right] \\ & \stackrel{(3p)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -7 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

tehát a megoldások: **(4p)**

$$x_1 = 1 + 7x_3 - 7x_4$$

$$x_2 = -3x_3 + 3x_4$$

$$x_3 \in \mathbb{R}$$

$$x_4 \in \mathbb{R}.$$

b) $B \cdot B = B$ **(3p)**, ezt felhasználva:

$$B^{2026} \stackrel{(2p)}{=} B^2 B^{2024} \stackrel{(1p)}{=} B \cdot B^{2024} = B^2 \cdot B^{2023} = B \cdot B^{2023} = \dots \stackrel{(2p)}{=} B$$

6. feladat (plusz 10 pontért)Bizonyítsuk be, hogy ha az \mathbb{R}^n -beli $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ vektorrendszer lineárisan független, továbbá a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{v}_{k+1}$ vektorrendszer lineárisan összefüggő, akkor

$$\underline{v}_{k+1} \in \text{span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k)$$

Mo. A $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{v}_{k+1}$ vektorrendszer lineárisan összefüggő, tehát léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}$ valós számok, hogy nem mindegyik 0 és

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_{k+1} \underline{v}_{k+1} = \underline{0} \quad \mathbf{(2p)}$$

Mivel a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ rendszer lineárisan független, ezért $\lambda_{k+1} \neq 0$ **(2p)**, ellenkező esetben a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ vektorrendszernek adódna egy nemtriviális lineáris kombinációja, ami a nullvektort állítja elő **(2p)**. Az előbbi egyenlőséget átrendezve:

$$\underline{v}_{k+1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{k+1}} \underline{v}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{k+1}} \underline{v}_2 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \underline{v}_k \quad \mathbf{(3p)},$$

azaz $\underline{v}_{k+1} \in \text{span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k)$ **(1p)**.