1. feladat (8+12=20 pont)
Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergensek az alábbi sorok? A *b*) részben adjuk meg a hatványsor összegfüggvényét is.

$$a)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{(x+3)^n}{2^n \cdot n^n} \qquad\qquad b)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{n}{2}(x+1)^n$$

Mo. *a*) Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $a_n := \frac{1}{2^n \cdot n^n}$. Ekkor

$$\sqrt[n]{|a_n|} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{1}{2n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát $R_a = +\infty$ **(2p)** , azaz minden $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens a sor **(2p)**
b) Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $b_n := \frac{n}{2}$. Ekkor

$$\sqrt[n]{|b_n|} \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát $R_b = 1$ **(1p)** . Az intervallum végpontjaiban: $x = 0$ esetén a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{2}$ sor divergens **(1p)** és $x = -2$ esetén a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \dfrac{n}{2}$ sor is divergens **(1p)** , tehát a hatványsor pontosan akkor konvergens, ha $x \in]-2, 0[$ **(1p)** .
Jelölje f a hatványsor összegfüggvényét, ekkor minden $x \in]-2, 0[$ esetén

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2}(x+1)^n \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{x+1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^{n-1} =$$

$$\overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{x+1}{2} \left(t \mapsto \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (t+1)^n}_{=-\frac{1}{t}} \right)'(x) \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{x+1}{2x^2}.$$

---

2. feladat (6+14=20 pont)

a) Definiáljuk az általánosított binomális együtthatókat, és mondjuk ki a binomiális sorfejtésre vonatkozó tételt.

b) Legyen
$$f(x) := \sqrt[3]{8 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$
Határozzuk meg az f függvény $x_0 = 0$ középpontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát, és adjuk meg az $f^{(99)}(0)$ deriváltat.

Mo. *a*) *Definíció.* Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}$. **(1p)**

$$\binom{\alpha}{k} := \begin{cases} 1 & ,\text{ha } k = 0 \\ \dfrac{\prod\limits_{j=0}^{k-1}(\alpha - j)}{k!} \left(= \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} \right) & ,\text{ha } k \neq 0. \end{cases} \qquad (\mathbf{2p})$$

Tétel. A $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \binom{\alpha}{k} x^k$ sor minden $\alpha \in \mathbb{R}$ és $x \in]-1,1[$ **(1p)** esetén konvergens, továbbá

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k . \quad \textbf{(2p)}$$

b)

$$f(x) \overset{\textbf{(2p)}}{=} 2\sqrt[3]{1+\frac{x^2}{8}} \overset{\textbf{(4p)}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{n} \frac{x^{2n}}{2^{3n-1}},$$

ahol az utolsó egyenlőség $x^2 < 8$ esetén teljesül **(2p)** , tehát a Taylor-sor konvergenciasugara $2\sqrt{2}$ **(1p)**.

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén jelölje a_n a (0 középpontú) Taylor-sor n-edik együtthatóját. Ekkor

$$f^{(99)}(0) \overset{\textbf{(1p)}}{=} 99! \cdot a_{99} \overset{\textbf{(2p)}}{=} 99! \cdot 0 = 0$$

---

3. feladat (10+10=20 pont)

a) Az $\mathbb{R}^n$-beli $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorrendszer lineárisan független. Igaz-e, hogy ekkor az

$$2\underline{a}\,, 2\underline{b}+3\underline{c}\,, \underline{a}+\underline{b}+5\underline{c}$$

vektorrendszer is lineárisan független?

b) Bázisa-e $\mathbb{R}^3$-nak az

$$\underline{u} := \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \underline{v} := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{w} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vektorrendszer?

Mo. *a)* Legyenek $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy

$$\lambda_1 \cdot (2\underline{a}) + \lambda_2(2\underline{b}+3\underline{c}) + \lambda_3(\underline{a}+\underline{b}+5\underline{c}) = \underline{0} \quad \textbf{(2p)}.$$

Ekkor

$$(2\lambda_1+\lambda_3)\underline{a} + (2\lambda_2+\lambda_3)\underline{b} + (3\lambda_2+5\lambda_3)\underline{c} = \underline{0} \quad \textbf{(2p)},$$

így az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ rendszer lineáris függetlensége miatt

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 \qquad\quad + \lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \quad \textbf{(1p)}, \\ 3\lambda_2 + 5\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

amiből (megoldva az egyenletrendszert) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ **(3p)** , tehát a vektorrendszer lineárisan független **(2p)** .

b) Mivel $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, ezért elég belátnunk a vektorrendszerről, hogy lineárisan független **(2p)** . Legyenek $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy

$$\lambda_1\underline{u} + \lambda_2\underline{v} + \lambda_3\underline{w} = \underline{0}. \quad \textbf{(2p)}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + \lambda_2 \qquad &= 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \quad \textbf{(2p)}, \\ 3\lambda_1 \qquad\qquad &= 0 \end{aligned}$$

amiből $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ **(2p)** , tehát a vektorrendszer lineárisan független **(2p)** .

4. feladat (10+10=20 pont)

Legyen $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B := \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

a) Számítsuk ki az AB és a $B^T A^T$ szorzatot.

b) Számítsuk ki az A mátrix determinánsát.

Mo. a)

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -8 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(6p)}, \quad B^T A^T \overset{\textbf{(3p)}}{=} (AB)^T \overset{\textbf{(1p)}}{=} \begin{bmatrix} 3 & -8 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

b) A második sora szerint kifejtve **(1p)**

$$\det(A) \overset{\textbf{(4p)}}{=} -4\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{\textbf{(4p)}}{=} -4(2-3) \overset{\textbf{(1p)}}{=} 4.$$

---

5. feladat (20 pont)

Adjuk meg az alábbi egyenletrendszer összes megoldását.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = 2 \end{cases}$$

Mo. a) Gauss-eliminációval **(2p)**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \overset{\textbf{(6p)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 9 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \overset{\textbf{(3p)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \overset{\textbf{(3p)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 27 \end{array}\right]$$

tilos sor keletkezett **(3p)** , tehát az egyenletrendszernek nincs megoldása **(3p)** .