1. feladat (10+10=20 pont)
a) Számítsuk ki az

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit. (A hozzájuk tartozó sajátvektorokat nem kell megadni.)
b) Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet. (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{1}{y^2 + 4x^2y^2} \quad (y \neq 0)$$

Mo. *a*)

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \overset{(\mathbf{4p})}{\underset{(*)}{=}} (3-\lambda)((3-\lambda)^2 - 4) = 0 \overset{(\mathbf{4p})}{\Leftrightarrow} \lambda = 1, 3, 5,$$

ahol a $(*)$ egyenlőségnél a determinánst az utolsó sora szerint fejtettük ki; tehát $\operatorname{sp}(A) = \{1, 3, 5\}$ **(2p)** .
b) Szeparálható differenciálegyenlet, a tanult módszerrel:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{y^2 + 4x^2y^2} \quad \Longrightarrow \quad \int y^2 \, \mathrm{d}y = \int \frac{1}{1+4x^2} \, \mathrm{d}x \quad (\mathbf{2p}).$$

Az egyenlőség bal oldala:

$$\int y^2 \, \mathrm{d}y = \frac{y^3}{3} + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}).$$

Az egyenlőség jobb oldala:

$$\int \frac{1}{1+4x^2} \, \mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{1}{2} \int \frac{2}{1+(2x)^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2x) + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}).$$

Tehát a megoldás (implicit alakban):

$$\frac{y^3(x)}{3} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2x) + C \quad (C \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}).$$

---

2. feladat (18 pont)
Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását.

$$xy' = y + x^2 \cos(x)$$

Mo. Átrendezve:

$$y' - \frac{y}{x} = x \cos(x) \quad (\mathbf{2p}).$$

Inhomogén lineáris egyenlet, a hozzá tartozó homogén egyenlet:

$$y' - \frac{y}{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_{h,\acute{a}}(x) = Cx \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad (\mathbf{6p}).$$

(Megoldva szeparálhatóként, vagy a megoldás általános alakjának ismeretéből.)
Az inhomogén egyenlet megoldása: keressük a megoldást $y(x) = c(x)x$ alakban (ahol c egy $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ differenciálható függvény) **(1p)** .
Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$\underbrace{c'(x)x + c(x)}_{y'(x)} - \underbrace{c(x)}_{\frac{y(x)}{x}} = x \cos(x) \quad (\mathbf{2p}).$$

Ebből pedig $c'(x) = \cos(x)$.

$$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + D \quad (D \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{3p}),$$

tehát a $D = 0$ választással $c(x) := \sin(x)$, így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = c(x)x = x\sin(x) \quad (\mathbf{1p}).$$

Amiből az általános megoldás:

$$y_{i,á}(x) \overset{(\mathbf{2p})}{=} y_{i,p}(x) + y_{h,á}(x) \overset{(\mathbf{1p})}{=} x\sin(x) + Cx \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

---

3. feladat (22 pont)
Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását.

$$y'' + 2y' + y = x + e^{-x}$$

Mo. Másodrendű, lineáris, állandó együtthatós, inhomogén egyenlet. A homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad (\mathbf{2p}),$$

gyökei: $\lambda_{1,2} = -1$ **(2p)** . Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{h,á}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R},\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p}).$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását keressük $y(x) = Ax + B + Cx^2e^{-x}$ ($x \in \mathbb{R}$, $A, B, C \in \mathbb{R}$) alakban (rezonancia) **(4p)** . Deriválva kétszer **(2p)** :

$$\begin{aligned} y(x) &= Ax + B + Cx^2e^{-x} && | \cdot 1 \\ y'(x) &= A + (-Cx^2 + 2Cx)e^{-x} && | \cdot 2 \\ y''(x) &= (Cx^2 - 4Cx + 2C)e^{-x} && | \cdot 1 \end{aligned}$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe **(1p)** :

$$Ax + 2A + B + 2Ce^{-x} = x + e^{-x} \quad \Longrightarrow \quad A = 1, B = -2, C = \frac{1}{2} \quad (\mathbf{3p}),$$

tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = x - 2 + \frac{x^2}{2}e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}).$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\begin{aligned} y_{i,á}(x) &= y_{i,p}(x) + y_{h,á}(x) = \\ &= x - 2 + \frac{x^2}{2}e^{-x} + C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} \quad (x \in \mathbb{R},\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}). \end{aligned}$$

---

4. feladat (6+14=20 pont)
a) Mondjuk ki a Laplace-transzformáltakkal kapcsolatos egyértelműségi tételt.
b) Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát Laplace-transzformáció segítségével.

$$y' + 2y = e^t, \quad y(0) = 2$$

Mo. *a*) Legyenek $f, g \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ folytonos függvények **(2p)** , és tegyük fel, hogy létezik olyan $s_0 \in \mathbb{R}_+$, hogy minden $s > s_0$ esetén $s \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}(f)) \cap \mathrm{Dom}(\mathcal{L}(g))$ és $\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(g)(s)$ **(2p)** . Ekkor $f = g$ **(2p)** .

b) Vegyük mindkét oldal Laplace-transzformáltját, és legyen $Y := \mathcal{L}(y)$.

$$\mathcal{L}(y' + 2y)(s) \overset{(\mathbf{3p})}{=} sY(s) - y(0) + 2Y(s)$$
$$\mathcal{L}\left(t \mapsto e^t\right)(s) \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{1}{s-1}$$

Ebből átrendezéssel, majd parciális törtekre bontással:

$$Y(s) \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{1}{(s-1)(s+2)} + \frac{2}{s+2} \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2}\right) + \frac{2}{s+2} \quad (s \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\})$$

Az egyértelműségi tétel alapján pedig

$$y(t) = \frac{1}{3}e^t + \frac{5}{3}e^{-2t} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p}).$$

---

5. feladat (10+10=20 pont)

a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 + xy + 3y^3}{x^2 + 2y^2} = ?$$

b) Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x + \sin(y^3)}{x^2 + 2y^2} & \text{, ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Számítsuk ki f elsőrendű parciális deriváltjait a sík minden pontjában.

Mo. *a*) Legyen $f(x,y) := \frac{2x^2+xy+3y^3}{x^2+2y^2} \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) \overset{(\mathbf{2p})}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2} \overset{(\mathbf{2p})}{=} 2$$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) \overset{(\mathbf{2p})}{=} \lim_{y\to 0} \frac{3}{2}y \overset{(\mathbf{2p})}{=} 0,$$

tehát a kérdéses határérték nem létezik **(2p)** .

b) Ha $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ **(1p)** , akkor

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{x^2 + 2y^2 - 2x(x + \sin(y^3))}{(x^2+2y^2)^2} \quad (\mathbf{2p}) \quad \partial_2 f(x,y) = \frac{3y^2\cos(y^3)(x^2+2y^2) - 4y(x + \sin(y^3))}{(x^2+2y^2)^2} \quad (\mathbf{2p}).$$

Az origóbeli parciális deriváltakat a definíció segítségével tudjuk kiszámolni.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad (\mathbf{1p}),$$

tehát $\partial_1 f(0,0)$ nem létezik **(1p)** .

$$\partial_2 f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y^3)}{2y^3} = \frac{1}{2} \quad (\mathbf{3p}).$$

6. feladat (plusz 10 pontért)
Bizonyítsuk be, hogy ha $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tetszőleges, akkor A-nak létezik (valós) sajátértéke.

Mo. A k_A polinom harmadfokú **(2p)** , ezért létezik valós gyöke **(2p)** (ennek indoklása: **(4p)**), ez pedig sajátértéke lesz A-nak **(2p)** .