

1. feladat (8+12=20 pont)

a) Lineáris-e az alábbi leképezés? Ha igen, adjuk meg a mátrixát.

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 2x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_3 \end{bmatrix}$$

b) Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet. A megoldást explicit alakban adjuk meg.

$$y' = \frac{x}{y + xy} \quad (y \neq 0)$$

Mo. a) Minden $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 2x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_3 \end{bmatrix} = f(\underline{x}) \quad (6\text{p}),$$

tehát f lineáris **(1p)** és a mátrixa

$$[f] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1\text{p}).$$

b) Szeparálható differenciálegyenlet, a tanult módszerrel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y + xy} \implies \int y \, dy = \int \frac{x}{1+x} \, dx \quad (2\text{p}).$$

Az egyenlőség bal oldala:

$$\int y \, dy = \frac{y^2}{2} + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \quad (2\text{p}).$$

Az egyenlőség jobb oldala:

$$\int \frac{x}{1+x} \, dx \stackrel{(2\text{p})}{=} \int 1 - \frac{1}{1+x} \, dx = x - \ln|1+x| + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R}) \quad (2\text{p}).$$

Tehát a megoldás (implicit alakban):

$$\frac{y^2(x)}{2} = x - \ln|1+x| + \tilde{C} \quad (\tilde{C} \in \mathbb{R}) \quad (2\text{p}).$$

Explicit alak:

$$y(x) = \pm \sqrt{2x - 2 \ln|1+x| + C} \quad (C \in \mathbb{R}) \quad (2\text{p}).$$

2. feladat (20 pont)

Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet.

$$y' - \frac{3y}{x} = x^3 e^{2x} \quad (x \neq 0)$$

Mo. Inhomogén lineáris egyenlet, a hozzá tartozó homogén egyenlet:

$$y' - \frac{3y}{x} = 0 \implies y_{h,\acute{a}}(x) = Cx^3 \quad (C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad (7\text{p}).$$

(Megoldva szeparálhatóként, vagy a megoldás általános alakjának ismeretéből.)

Az inhomogén egyenlet megoldása: keressük a megoldást $y(x) = c(x)x^3$ alakban (ahol c egy $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény) **(1p)**.

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$\underbrace{c'(x)x^3 + 3c(x)x^2}_{y'(x)} - \underbrace{3c(x)x^2}_{\frac{3y(x)}{x}} = x^3 e^{2x} \quad (2\text{p}).$$

Ebből pedig $c'(x) = e^{2x}$.

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + D \quad (D \in \mathbb{R}) \quad (3\text{p}),$$

tehát a $D = 0$ választással $c(x) := \frac{1}{2}e^{2x}$, így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = c(x)x^3 = \frac{x^3}{2}e^{2x} \quad (2\text{p}).$$

Amiből az általános megoldás:

$$y_{i,\acute{a}}(x) \stackrel{(2\text{p})}{=} y_{i,p}(x) + y_{h,\acute{a}}(x) \stackrel{(1\text{p})}{=} \frac{x^3}{2}e^{2x} + Cx^3 \quad (C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

3. feladat (20 pont)

Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását.

$$y'' - y = e^x(2x + 3)$$

Mo. Másodrendű, lineáris, állandó együtthatós, inhomogén egyenlet. A homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad (2\text{p}),$$

gyökei: $\lambda_{1,2} = \pm 1$ **(2p)**. Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{h,\acute{a}}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (4\text{p}).$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y(x) = (Ax^2 + Bx)e^x \quad (x \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{R}) \quad (4\text{p})$$

alakban keressük (rezonancia miatt). Deriválva kétszer **(2p)**:

$$\begin{array}{ll} y(x) = (Ax^2 + Bx)e^x & | \cdot (-1) \\ y'(x) = (Ax^2 + (2A + B)x + B)e^x & | \cdot 0 \\ y''(x) = (Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B)e^x & | \cdot 1. \end{array}$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$y''(x) - y(x) = (4Ax + 2A + 2B)e^x = (2x + 3)e^x \quad (1\text{p})$$

$$\implies A = \frac{1}{2}, \quad B = 1 \quad (2\text{p}),$$

tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x\right) e^x \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (1\text{p}).$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\begin{aligned} y_{i,h}(x) &= y_{i,p}(x) + y_{h,h}(x) = \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + x\right) e^x + C_1 e^x + C_2 e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (2\text{p}). \end{aligned}$$

4. feladat (16 pont)

Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát Laplace-transzformáció segítségével.

$$y'' + 2y' + y = e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

Mo. Vegyük mindkét oldal Laplace-transzformáltját, és legyen $Y := \mathcal{L}(y)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y'' + 2y' + y)(s) &\stackrel{(3\text{p})}{=} s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2sY(s) - 2y(0) + Y(s) \\ \mathcal{L}(t \mapsto e^t)(s) &\stackrel{(2\text{p})}{=} \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

Ebből átrendezéssel, majd parciális törtekre bontással:

$$\begin{aligned} Y(s) &\stackrel{(2\text{p})}{=} \frac{1}{(s-1)(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^2} \stackrel{(1\text{p})}{=} \frac{2s-1}{(s-1)(s+1)^2} \stackrel{(1\text{p})}{=} \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} \stackrel{(1\text{p})}{=} \\ &= \frac{A(s+1)^2 + B(s-1)(s+1) + C(s-1)}{(s-1)(s+1)^2}, \end{aligned}$$

amiből behelyettesítéssel vagy beszorzás után az együtthatók összehasonlításával:

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{4}, \quad C = \frac{3}{2}, \quad \text{azaz} \quad Y(s) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s-1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(s+1)^2} \quad (3\text{p})$$

Az egyértelműségi tétel alapján pedig

$$y(t) = \frac{1}{4} e^t - \frac{1}{4} e^{-t} + \frac{3}{2} t e^{-t} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (3\text{p}).$$

5. feladat (4+6+10+4=24 pont)

Legyen

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{3xy}{x^2 + 2y^2} & , \text{ ha } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & , \text{ ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Fogalmazzuk meg a tanult elégséges feltételt pontbeli (totális) differenciálhatóságra.
 b) Folytonos-e az f függvény? (Indokoljunk!)
 c) Számítsuk ki f elsőrendű parciális deriváltjait!
 d) A sík mely pontjaiban differenciálható f ? (Indokoljunk!)

Mo. Elégséges feltétel pontbeli differenciálhatóságra: Ha $\underline{a} \in \bigcap_{i=1}^n \text{int}(\text{Dom}(\partial_i f))$, és f minden parciális deriváltfüggvénye folytonos \underline{a} -ban (vagy gyengébb feltétel: \underline{a} egy környezetén), akkor f (totálisan) differenciálható \underline{a} -ban **(4p)**.

b) $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (0, 0)$ és $f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = 1 \not\rightarrow 0 = f(0, 0)$ **(5p)**, tehát az átviteli elv miatt f nem folytonos az origóban **(1p)**.

c) Ha $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ **(1p)**, akkor

$$\partial_1 f(x, y) = \frac{3y(x^2 + 2y^2) - 6x^2 y}{(x^2 + 2y^2)^2} \quad \mathbf{(2p)} \quad \partial_2 f(x, y) = \frac{3x(x^2 + 2y^2) - 12xy^2}{(x^2 + 2y^2)^2} \quad \mathbf{(2p)}$$

Az origóbeli parciális deriváltakat a definíció segítségével tudjuk kiszámolni **(1p)**:

$$\partial_1 f(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0 \quad \mathbf{(2p)} \quad \partial_2 f(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0 \quad \mathbf{(2p)}.$$

d) Az origóban nem differenciálható f , mert ott nem folytonos **(2p)**, a sík többi pontjában pedig differenciálható, mert $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ folytonos az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (nyílt) halmazon **(2p)**.

6. feladat (plusz 10 pontért)

Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés, és $\text{Ker}(f) = \{0\}$, akkor f injektív. (Emlékeztető: $\text{Ker}(f) := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\underline{x}) = \underline{0}\}$.)

Mo. Legyen $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \text{Dom}(f)$, és tegyük fel, hogy $f(\underline{x}_1) = f(\underline{x}_2)$ **(2p)**. Ekkor f linearitása miatt

$$f(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) = f(\underline{x}_1) - f(\underline{x}_2) = \underline{0} \quad \mathbf{(4p)},$$

azaz $\underline{x}_1 - \underline{x}_2 \in \text{Ker}(f) = \{0\}$ **(2p)**, következésképpen $\underline{x}_1 = \underline{x}_2$ **(2p)**.