1. feladat (5+5+10=20 pont)
a) Mikor nevezünk lineárisnak egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezést? Írjuk le a definíciót.
b) Lineáris-e az alábbi leképezés? Ha igen, adjuk meg a mátrixát.

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x_2^2 \\ 2x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_3 \end{bmatrix}$$

c) Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet.

$$y' = \frac{x\sqrt{1+y^2}}{y} \qquad (y \neq 0)$$

Mo. *a*) A definíció helyes kimondása: **(5p)** . (A mátrixokkal való ekvivalens jellemzésért legfeljebb 2 pont adható.)

b) Nem, mert pl $f\left(-\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = -f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ **(5p)**

c) Szeparálható differenciálegyenlet, a tanult módszerrel:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x\sqrt{1+y^2}}{y} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,\mathrm{d}y = \int x\,\mathrm{d}x \quad (\mathbf{2p}).$$

Az egyenlőség bal oldala:

$$\int \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,\mathrm{d}y = \sqrt{1+y^2} + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p}).$$

Az egyenlőség jobb oldala:

$$\int x\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{x^2}{2} + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}).$$

Tehát a megoldás (implicit alakban):

$$\sqrt{1+y^2(x)} = \frac{x^2}{2} + C \quad (C \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}).$$

---

2. feladat (20 pont)
Oldjuk meg az

$$y' = (2y - 2x)^2 + 1$$

differenciálegyenletet. A megoldást explicit alakban adjuk meg. (Segítség: használjuk a tanult helyettesítések valamelyikét.)

Mo. Legyen $u(x) := 2y(x) - 2x$ **(2p)** . Ekkor

$$u'(x) = 2y'(x) - 2 \quad \Leftrightarrow \quad y'(x) = \frac{u'(x)}{2} + 1 \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát az új differenciálegyenlet:

$$u' = 2u^2 \quad (\mathbf{2p})$$

Szeparálható, $u \equiv 0$ megoldás **(1p)** . A tanult módszerrel:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2u^2 \quad \Longrightarrow \quad \int u^{-2}\,\mathrm{d}u = \int 2\,\mathrm{d}x \quad (\mathbf{2p}) \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{u(x)} = 2x + \widetilde{C} \quad (\widetilde{C} \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{5p}),$$

tehát az eredeti egyenlet megoldásai:

$$y(x) = x - \frac{1}{4x - C} \quad (\mathbf{4p}) \quad \text{és} \quad y(x) = x \quad (\mathbf{2p})$$

3. feladat (20 pont)
Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' + y = 3\sin(2x)$$

Mo. Másodrendű, lineáris állandó együtthatós, inhomogén egyenlet. A homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad (\mathbf{2p}),$$

gyökei: $\lambda_{1,2} = \pm i$, **(2p)** . Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{h,\acute{a}}(x) = C_1\sin(x) + C_2\cos(x) \quad (x \in \mathbb{R},\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p})$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x) \quad (x \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{3p})$$

alakban keressük (nincs rezonancia). Deriválva kétszer **(2p)** :

$$\begin{aligned} y(x) &= A\sin(2x) + B\cos(2x) && |\cdot 1 \\ y'(x) &= 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x) && |\cdot 0 \\ y''(x) &= -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x) && |\cdot 1 \end{aligned}$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$y''(x) + y(x) = -3A\sin(2x) - 3B\cos(2x) = 3\sin(2x) \quad (\mathbf{2p})$$

$$\Longrightarrow \quad A = -1,\, B = 0 \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = -\sin(2x) \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{1p})$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\begin{aligned} y_{i,\acute{a}}(x) &= y_{i,p}(x) + y_{h,\acute{a}}(x) = \\ &= -\sin(2x) + C_1\sin(x) + C_2\cos(x) \quad (x \in \mathbb{R},\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}) \end{aligned}$$

4. feladat (20 pont)
Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát Laplace-transzformáció segítségével.

$$y' + 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 1$$

Mo. Vegyük mindkét oldal Laplace-transzformáltját, és legyen $Y := \mathcal{L}(y)$.

$$\mathcal{L}(y' + 2y)(s) \overset{(\mathbf{4p})}{=} sY(s) - y(0) + 2Y(s)$$

$$\mathcal{L}\left(t \mapsto e^{-t}\right)(s) \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{1}{s+1}$$

Ebből átrendezéssel:

$$Y(s) \overset{(\mathbf{4p})}{=} \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \frac{1}{s+2} \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{1}{s+1}$$

Az egyértelműségi tétel alapján pedig

$$y(t) = e^{-t} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{3p}).$$

5. feladat (6+10+4=20 pont)

a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin\left(\frac{1}{3x^2+2y^2}\right) \operatorname{arctg}(x^3+y^4) = ?$$

Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{3x\cos(y)}{x^2+2y^2} & , \text{ha } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \\ 0 & , \text{ha } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

b) Számítsuk ki f elsőrendű parciális deriváltjait a sík minden pontjában.

c) A sík mely pontjaiban differenciálható (totálisan) f? (Indokoljunk.)

Mo. *a)* Legyen $f(x,y) := \sin\left(\frac{1}{3x^2+2y^2}\right)\operatorname{arctg}(x^3+y^4)$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$. Tegyük fel, hogy $(x_k,y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$-ban haladó sorozat, amelyre $(x_k,y_k)\xrightarrow{k\to\infty}(0,0)$. Ekkor

$$f(x_k,y_k) \overset{(\mathbf{2p})}{=} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{3x_k^2+2y_k^2}\right)}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{\operatorname{arctg}(x_k^3+y_k^4)}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0} \underset{(\mathbf{2p})}{\xrightarrow{k\to\infty}} 0,$$

tehát a pontbeli határérték definíciója alapján $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ **(2p)** . (Akkor is adható maximális pont, ha a fenti gondolatmenetben nem szerepelnek sorozatok.)

b) Ha $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ **(1p)** , akkor

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{3\cos(y)(x^2+2y^2)-6x^2\cos(y)}{(x^2+2y^2)^2} \quad (\mathbf{2p}) \qquad \partial_2 f(x,y) = \frac{-3x\sin(y)(x^2+2y^2)-12xy\cos(y)}{(x^2+2y^2)^2} \quad (\mathbf{2p}).$$

Az origóbeli parciális deriváltakat a definíció segítségével tudjuk kiszámolni.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{3}{x^2} = +\infty \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát $\partial_1 f(0,0)$ nem létezik **(1p)** .

$$\partial_2 f(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y} = 0 \quad (\mathbf{2p}).$$

c) Az origóban nem differenciálható f, mert $\partial_1 f(0,0)$ nem létezik **(2p)** , a sík többi pontjában pedig differenciálható, mert $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ folytonos az $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ nyílt halmazon **(2p)** .
