Matematika G1 Első ZH

B csoport, megoldások

2023

A dolgozaton 5+5+5+5+5=25 pont szerezhető. Munkaidő: 70 perc.

1. Számítsa ki az alábbi sorozat határértékét! Adjon tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ küszöbindexet!

$$a_n = \frac{n^2 + 4n - 10}{3n^2 + 3n + 6}$$

Megoldás: A határérték kiszámításához kiemelhetünk a számlálóból és a nevezőből is n^2-et:

$$\frac{n^2 + 4n - 10}{3n^2 + 3n + 6} = \frac{n^2\left(1 + \frac{4}{n} - \frac{10}{n^2}\right)}{n^2\left(3 + \frac{3}{n} + \frac{6}{n^2}\right)} = \frac{1 + \frac{4}{n} - \frac{10}{n^2}}{3 + \frac{3}{n} + \frac{6}{n^2}} \to \frac{1 + 0 - 0}{3 + 0 + 0} = \frac{1}{3}.$$

(1 pont) Itt tétellel is indokolhatunk (ha rendesen ki van mondva: polinomok főegyütthatói határozzák meg a határértéket).

Mivel $A = \dfrac{1}{3}$, a vizsgálandó különbség:

$$\left|\frac{n^2 + 4n - 10}{3n^2 + 3n + 6} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3(n^2 + 4n - 10) - (3n^2 + 3n + 6)}{3(3n^2 + 3n + 6)}\right| =$$

$$= \left|\frac{3n^2 + 12n - 30 - 3n^2 - 3n - 6}{3(3n^2 + 3n + 6)}\right| = \left|\frac{9n - 36}{3(3n^2 + 3n + 6)}\right| = \left|\frac{3n - 12}{3n^2 + 3n + 6}\right|$$

(1 pont) Felhasználjuk, hogy $3n^2 + 3n + 6 \geq 0$ és $3n - 12 \geq 0$ ha $n \geq 4$:

$$= \frac{3n - 12}{3n^2 + 3n + 6} \leq \frac{3n}{3n^2 + 3n + 6} \leq \frac{n}{n^2 + n + 2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

(2 pont) Ebből $\dfrac{1}{\varepsilon} < n$, azaz $N(\varepsilon) = \min\left\{\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1,\ 4\right\}$. (1 pont)

2. Számítsa ki a következő sorozat határértékét! Válaszának minden lépését indokolja!

$$a_n = \sqrt[n]{2n^2 + 8n + 4} + \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{7n}$$

Megoldás: Vizsgáljuk a két tagot külön-külön!

Az első tagot rendőr elvvel oldhatjuk meg:

$$\sqrt[n]{2n^2 + 8n + 4} \leq \sqrt[n]{2n^2 + 8n^2 + 4n^2} = \sqrt[n]{14n^2} = \sqrt[n]{14}(\sqrt[n]{n})^2 \to 1,$$

$$\sqrt[n]{2n^2 + 8n + 4} \geq \sqrt[n]{2n^2} = \sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^2 \to 1,$$

(2,5 pont) tehát az eredeti tag is az egyhez tart. (0,5 pont)

A második tag:

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{7n} = \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{7/2} \to e^{7/2}$$

(2 pont)

Összességében tehát $a_n \to 1 + e^{7/2}$.

3. Folytonossá tehető-e az alábbi függvény az $x = 0$ pontban? Ha igen, határozza meg a értékét úgy, hogy a függvény folytonos legyen az adott pontban!

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg}(3x)}{x^2} & \text{ha } x \neq 0, \\ a & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Megoldás: A függvény akkor tehető folytonossá az adott pontban, ha jobb- és baloldali határértékei léteznek és ezek egyenlők. (1 pont - kimondás nélkül, alkalmazás esetén is jár a pont)

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{x^2} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin(3x)}{3x} \frac{3x}{x^2} \frac{1}{\cos(3x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin(3x)}{3x} \frac{3x}{x^2} \frac{1}{\cos(3x)} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin(3x)}{3x} \frac{3}{x} \frac{1}{\cos(3x)} = +\infty$$

(2,5 pont)

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{x^2} = \cdots = \lim_{x\to 0-0} \frac{\sin(3x)}{3x} \frac{3}{x} \frac{1}{\cos(3x)} = -\infty$$

(1 pont) Így nem tehető folytonossá a függvény. (0,5 pont)

4. Számítsa ki az alábbi függvény deriváltfüggvényét!

$$f(x) = \cos\left(\frac{x^2+3}{x+x^2}\right) + e^{3x}\sin(x)$$

Megoldás:

$$f'(x) = -\sin\left(\frac{x^2+3}{x+x^2}\right) \frac{(2x)(x+x^2) - (x^2+3)(1+2x)}{(x+x^2)^2} + 3e^{3x}\sin(x) + e^{3x}(\cos(x))$$

(1+2+2 pont)

5*. Adjuk meg az összes olyan sorozatot, mely a tanult definíció szerint konvergálni fog egy adott $A \in \mathbb{R}$ értékhez az $N(\varepsilon) = 1$ választással! (A maximális pontszám csak indoklás esetén kapható meg!)

Megoldás: Ezen sorozatok a konstans $a_n = A$ sorozatok (1 pont - csak gondolkodásra utaló jelek esetén adjuk meg).

Ha egy a_n sorozat konvergál egy A értékhez $N(\varepsilon) = 1$ választással, az azt jelenti, hogy már a sorozat első eleme benne van a vizsgált sávban. Ennek viszont minden ε szélességű sáv esetén teljesülnie kell, tehát a sorozat minden eleme benne van az A tetszőlegesen kicsi sávjában. Ez azt jelenti, hogy $a_n = A$ konvergens sorozat. (4 pont - más, helyes indoklás is elfogadható)