Matematika G1 Első ZH

A csoport, megoldások

2023

A dolgozaton 5+5+5+5+5=25 pont szerezhető. Munkaidő: 70 perc.

1. Számítsa ki az alábbi sorozat határértékét! Adjon tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ küszöbindexet!

$$a_n = \frac{n^2+3n-5}{2n^2+4n+10}$$

Megoldás: A határérték kiszámításához kiemelhetünk a számlálóból és a nevezőből is n^2-et:

$$\frac{n^2+3n-5}{2n^2+4n+10} = \frac{n^2\left(1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{4}{n}+\frac{10}{n^2}\right)} = \frac{1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{2+\frac{4}{n}+\frac{10}{n^2}} \to \frac{1+0-0}{2+0+0} = \frac{1}{2}.$$

(1 pont) Itt tétellel is indokolhatunk (ha rendesen ki van mondva: polinomok főegyütthatói határozzák meg a határértéket).

Mivel $A = \dfrac{1}{2}$, a vizsgálandó különbség:

$$\left|\frac{n^2+3n-5}{2n^2+4n+10} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2(n^2+3n-5)-(2n^2+4n+10)}{2(2n^2+4n+10)}\right| =$$

$$= \left|\frac{2n^2+6n-10-2n^2-4n-10}{2(2n^2+4n+10)}\right| = \left|\frac{2n-20}{2(2n^2+4n+10)}\right| = \left|\frac{n-10}{2n^2+4n+10}\right|$$

(1 pont) Felhasználjuk, hogy $2n^2+4n+10 \geq 0$ és $n-10 \geq 0$ ha $n \geq 11$:

$$= \frac{n-10}{2n^2+4n+10} \leq \frac{n}{2n^2+4n+10} \leq \frac{n}{2n^2+4n+10} \leq \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n} < \varepsilon$$

(2 pont) Ebből $\dfrac{1}{2\varepsilon} < n$, azaz $N(\varepsilon) = \min\left\{\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]+1,\ 11\right\}$. (1 pont)

2. Számítsa ki a következő sorozat határértékét! Válaszának minden lépését indokolja!

$$a_n = \sqrt[n]{5n^2+3n+2} + \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{5n}$$

Megoldás: Vizsgáljuk a két tagot külön-külön!

Az első tagot rendőr elvvel oldhatjuk meg:

$$\sqrt[n]{5n^2+3n+2} \leq \sqrt[n]{5n^2+3n^2+2n^2} = \sqrt[n]{10n^2} = \sqrt[n]{10}(\sqrt[n]{n})^2 \to 1,$$

$$\sqrt[n]{5n^2+3n+2} \geq \sqrt[n]{5n^2} = \sqrt[n]{5}(\sqrt[n]{n})^2 \to 1,$$

(2,5 pont) tehát az eredeti tag is az egyhez tart. (0,5 pont)

A második tag:

$$\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{5n} = \left[\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{5/3} \to e^{5/3}$$

(2 pont)

Összességében tehát $a_n \to 1+e^{5/3}$.

3. Folytonossá tehető-e az alábbi függvény az $x = 0$ pontban? Ha igen, határozza meg a értékét úgy, hogy a függvény folytonos legyen az adott pontban!

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg}(2x)}{x^3} & \text{ha } x \neq 0, \\ a & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Megoldás: A függvény akkor tehető folytonossá az adott pontban, ha jobb- és baloldali határértékei léteznek és ezek egyenlők. (1 pont - kimondás nélkül, alkalmazás esetén is jár a pont)

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{x^3} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} \frac{1}{x^3} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin(2x)}{2x} \frac{2x}{x^3} \frac{1}{\cos(2x)} =$$
$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin(2x)}{2x} \frac{2x}{x^3} \frac{1}{\cos(2x)} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin(2x)}{2x} \frac{2}{x^2} \frac{1}{\cos(2x)} = +\infty$$

(2,5 pont)

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{x^3} = \cdots = \lim_{x\to 0-0} \frac{\sin(2x)}{2x} \frac{2}{x^2} \frac{1}{\cos(2x)} = +\infty$$

(1 pont) Így nem tehető folytonossá a függvény. (0,5 pont)

4. Számítsa ki az alábbi függvény deriváltfüggvényét!

$$f(x) = \sin\left(\frac{x^3+2}{x^2+x}\right) + e^{2x}\cos(x)$$

Megoldás:

$$f'(x) = \cos\left(\frac{x^3+2}{x^2+x}\right) \frac{(3x^2)(x^2+x) - (x^3+2)(2x+1)}{(x^2+x)^2} + 2e^{2x}\cos(x) + e^{2x}(-\sin(x))$$

(1+2+2 pont)

5*. Adjuk meg az összes olyan sorozatot, mely a tanult definíció szerint konvergálni fog egy adott $A \in \mathbb{R}$ értékhez az $N(\varepsilon) = [\varepsilon] + 1$ választással! (A maximális pontszám csak indoklás esetén kapható meg!)

Megoldás: Ezen sorozatok a konstans $a_n = A$ sorozatok (1 pont - csak gondolkodásra utaló jelek esetén adjuk meg).

Ha egy a_n sorozat konvergál egy A értékhez $N(\varepsilon) = [\varepsilon] + 1$, az azt jelenti, hogy elegendően kicsi ε esetén $N(\varepsilon) = [\varepsilon] + 1 = 1$, tehát már az első elem benne van a vizsgált sávban. Ennek viszont minden ε szélességű sáv esetén teljesülnie kell, tehát a sorozat minden eleme benne van az A tetszőlegesen kicsi sávjában. Ez azt jelenti, hogy $a_n = A$ konvergens sorozat. (4 pont - más, helyes indoklás is elfogadható)