Matematika G1 Második ZH

B csoport, megoldások

2023

A dolgozaton 5+5+5+5+5=25 pont szerezhető. Munkaidő: 70 perc.

1. Számítsa ki az alábbi határértéket!

$$\lim_{x\to 3} \frac{e^{x^2} - e^9}{x-3}$$

Megoldás: A l'Hospital szabályt alkalmazva (mivel a határérték 0/0 alakú) (1 pont):

$$\lim_{x\to 3} \frac{e^{x^2} - e^9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(e^{x^2} - e^9)'}{(x-3)'} = \lim_{x\to 2} \frac{e^{x^2} 2x}{1} = 6e^9.$$

(4 pont)

2. Adja meg az alábbi függvény esetében az értelmezési tartományt, majd azokat az intervallumokat, ahol a függvény monoton növekvő ill. csökkenő! Melyek a függvény szélsőértékei?

$$f(x) = \frac{-1}{x^2 - 2}$$

Megoldás: A függvény deriváltja:

$$f'(x) = \left(-(x^2-2)^{-1}\right)' = (x^2-2)^{-2}(2x) = \frac{2x}{(x^2-2)^2}$$

(1 pont) Ez akkor lehet nulla, ha $2x = 0$ azaz $x = 0$, illetve az is kritikus pont, ahol $x = \pm\sqrt{2}$ (itt nem értelmes, ezeknél nem baj, ha nincs a táblázatban). (1 pont)

x	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2},0)$	0	$(0, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
$f'(x)$	negatív	negatív	0	pozitív	pozitív
$f(x)$	szig. mon. csökk.	szig. mon. csökk.	lok. min.	szig. mon. nő	szig. mon. nő

(oszloponként 0,5+0,5+1+0,5+0,5 pont)

3. Adjuk meg az $r = \left(\cos\left(\frac{\varphi}{4}\right)\right)^2$ polárkoordinátás módon megadott görbe érintőjének egyenletét a $\varphi_0 = \pi$ pontban!

Megoldás: A paraméteres egyenletek:

$$x(\varphi) = r\cos(\varphi) = \left(\cos\left(\frac{\varphi}{4}\right)\right)^2 \cos(\varphi).$$

$$y(\varphi) = r\sin(\varphi) = \left(\cos\left(\frac{\varphi}{4}\right)\right)^2 \sin(\varphi).$$

(1 pont) Az érintőhöz szükségünk lesz a $\varphi_0 = \pi/4$ pontbeli derivált értékére - ehhez a koordinátafüggvények deriváltjai:

$$x'(\varphi) = \left(\left(\cos\left(\frac{\varphi}{4}\right)\right)^2 \cos(\varphi)\right)' = 2\left(\cos\left(\frac{\varphi}{4}\right)\right)\left(-\sin\left(\frac{\varphi}{4}\right)\right)\frac{1}{4}\cos(\varphi) + \left(\cos\left(\frac{\varphi}{4}\right)\right)^2 (-\sin(\varphi)).$$

$$y'(\varphi) = \left(\left(\cos\left(\frac{\varphi}{4}\right)\right)^2 \sin(\varphi)\right)' = 2\left(\cos\left(\frac{\varphi}{4}\right)\right)\left(-\sin\left(\frac{\varphi}{4}\right)\right)\frac{1}{4}\sin(\varphi) + \left(\cos\left(\frac{\varphi}{4}\right)\right)^2 \cos(\varphi)$$

(1 pont) Így a derivált:

$$\frac{y'(\varphi)}{x'(\varphi)} = \frac{\left(\cos\left(\frac{\varphi}{4}\right)\right)\left(-\sin\left(\frac{\varphi}{4}\right)\right)\frac{1}{2}\sin(\varphi) + \left(\cos\left(\frac{\varphi}{4}\right)\right)^2\cos(\varphi)}{\left(\cos\left(\frac{\varphi}{4}\right)\right)\left(-\sin\left(\frac{\varphi}{4}\right)\right)\frac{1}{2}\cos(\varphi) + \left(\cos\left(\frac{\varphi}{4}\right)\right)^2(-\sin(\varphi))} =$$

$$= \frac{\left(-\sin\left(\frac{\varphi}{4}\right)\right)\frac{1}{2}\sin(\varphi) + \left(\cos\left(\frac{\varphi}{4}\right)\right)\cos(\varphi)}{\left(-\sin\left(\frac{\varphi}{4}\right)\right)\frac{1}{2}\cos(\varphi) + \left(\cos\left(\frac{\varphi}{4}\right)\right)(-\sin(\varphi))}$$

Behelyettesítve a $\varphi_0 = \pi$ értéket kapjuk, hogy a derivált

$$\frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{1}{2}\cdot 0 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-1)}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{1}{2}(-1) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 0} = -\frac{1}{2}$$

(1 pont) A további két szükséges érték:

$$x(\varphi_0) = \left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{4}\right)\right)^2\cos(\varphi_0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$y(\varphi_0) = \left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{4}\right)\right)^2\sin(\varphi_0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot 0 = 0$$

(1 pont) Így az érintő egyenlete:

$$y - 0 = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right),$$

(1 pont) azaz $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

4. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrált!

$$\int 2x\sin(x)dx$$

Megoldás: Parciális integrálással: használjuk a $v = 2x$, $u' = \sin(x)$ választást (1 pont), ahol $v' = 2$ és $u = -\cos(x))$ (2 pont):

$$\int 2x\sin(x)dx = 2x(-\cos(x)) - \int 2(-\cos(x))dx =$$

(1 pont)

$$= -2x\cos(x) + 2\sin(x) + c.$$

5*. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrált!

$$\int \frac{\sin(x)}{(\sin(x))^2 + 2(\cos(x))^2}dx$$

Megoldás:

$$\int \frac{\sin(x)}{(\sin(x))^2 + 2(\cos(x))^2}dx = \int \frac{\sin(x)}{1 + (\cos(x))^2}dx = -\mathrm{arctg}(\sin(x)) + c$$

(5 pont - ha a primitív függvényt kitalálja próbálgatással, azért is jár az 5 pont)