Matematika G1 Második ZH

A csoport, megoldások

2023

A dolgozaton 5+5+5+5+5=25 pont szerezhető. Munkaidő: 70 perc.

1. Számítsa ki az alábbi határértéket!

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^{x^2}-e^4}{x-2}$$

Megoldás: A l'Hospital szabályt alkalmazva (mivel a határérték 0/0 alakú) (1 pont):

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^{x^2}-e^4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(e^{x^2}-e^4)'}{(x-2)'}=\lim_{x\to 2}\frac{e^{x^2}2x}{1}=4e^4.$$

(4 pont)

2. Adja meg az alábbi függvény esetében az értelmezési tartományt, majd azokat az intervallumokat, ahol a függvény monoton növekvő ill. csökkenő! Melyek a függvény szélsőértékei?

$$f(x)=\frac{1}{x^2-3}$$

Megoldás: A függvény deriváltja:

$$f'(x)=\left((x^2-3)^{-1}\right)'=-(x^2-3)^{-2}(2x)=\frac{-2x}{(x^2-3)^2}$$

(1 pont) Ez akkor lehet nulla, ha $-2x=0$ azaz $x=0$, illetve az is kritikus pont, ahol $x=\pm\sqrt{3}$ (itt nem értelmes, ezeknél nem baj, ha nincs a táblázatban). (1 pont)

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},\infty)$
$f'(x)$	pozitív	pozitív	0	negatív	negatív
$f(x)$	szig. mon. nő	szig. mon. nő	lok. max.	szig. mon. csökk.	szig. mon. csökk.

(oszloponként 0,5+0,5+1+0,5+0,5 pont)

3. Adjuk meg az $r=\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2$ polárkoordinátás módon megadott görbe érintőjének egyenletét a $\varphi_0=\pi/2$ pontban!

Megoldás: A paraméteres egyenletek:

$$x(\varphi)=r\cos(\varphi)=\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2\cos(\varphi).$$

$$y(\varphi)=r\sin(\varphi)=\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2\sin(\varphi).$$

(1 pont) Az érintőhöz szükségünk lesz a $\varphi_0=\pi/4$ pontbeli derivált értékére - ehhez a koordinátafüggvények deriváltjai:

$$x'(\varphi)=\left(\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2\cos(\varphi)\right)'=2\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\left(-\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\frac{1}{2}\cos(\varphi)+\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2(-\sin(\varphi)).$$

$$y'(\varphi)=\left(\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2\sin(\varphi)\right)'=2\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\left(-\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\frac{1}{2}\sin(\varphi)+\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2\cos(\varphi)$$

(1 pont) Így a derivált:

$$\frac{y'(\varphi)}{x'(\varphi)} = \frac{\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\left(-\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\sin(\varphi) + \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2\cos(\varphi)}{\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\left(-\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\cos(\varphi) + \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2(-\sin(\varphi))} =$$

$$= \frac{\left(-\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\sin(\varphi) + \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\cos(\varphi)}{\left(-\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\cos(\varphi) + \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)(-\sin(\varphi))}$$

Behelyettesítve a $\varphi_0 = \pi/2$ értéket kapjuk, hogy a derivált

$$\frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(+1) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 0}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 0 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-1)} = 1$$

(1 pont) A további két szükséges érték:

$$x(\varphi_0) = \left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\right)^2\cos(\varphi_0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot 0 = 0$$

$$y(\varphi_0) = \left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\right)^2\sin(\varphi_0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

(1 pont) Így az érintő egyenlete:

$$y - \frac{1}{2} = 1\,(x - 0)\,,$$

(1 pont) azaz $y = x + \frac{1}{2}$.

4. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrált!

$$\int 3x\cos(x)dx$$

Megoldás: Parciális integrálással: használjuk a $v = 3x$, $u' = \cos(x)$ választást (1 pont), ahol $v' = 3$ és $u = \sin(x)$) (2 pont):

$$\int 3x\cos(x)dx = 3x\sin(x) - \int 3\sin(x)dx =$$

(1 pont)

$$= 3x\sin(x) + 3\cos(x) + c.$$

5*. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrált!

$$\int \frac{\cos(x)}{2(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2}dx$$

Megoldás:

$$\int \frac{\cos(x)}{2(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2}dx = \int \frac{\cos(x)}{1 + (\sin(x))^2}dx = \mathrm{arctg}(\sin(x)) + c$$

(5 pont - ha a primitív függvényt kitalálja próbálgatással, azért is jár az 5 pont)