

Matematika G1 Első PótZH

B csoport, megoldások

2023

A dolgozaton $5+5+5+5+5=25$ pont szerezhető. Munkaidő: 70 perc.

1. Számítsa ki az alábbi sorozat határértékét! Adjon tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ küszöbindexet!

$$a_n = \frac{n^2 - 7n + 3}{n^2 + 5n + 10}$$

Megoldás: A határérték kiszámításához kiemelhetünk a számlálóból és a nevezőből is n^2 -et:

$$\frac{n^2 - 7n + 3}{n^2 + 5n + 10} = \frac{n^2 \left(1 - \frac{7}{n} + \frac{3}{n^2}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{5}{n} + \frac{10}{n^2}\right)} = \frac{1 - \frac{7}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{5}{n} + \frac{10}{n^2}} \rightarrow \frac{1 - 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 1.$$

(1 pont) Itt tétellel is indokolhatunk (ha rendszeren ki van mondva: polinomok főgyütthetói határozzák meg a határértéket).

Mivel $A = 1$, a vizsgálandó különbség:

$$\left| \frac{n^2 - 7n + 3}{n^2 + 5n + 10} - 1 \right| = \left| \frac{(n^2 - 7n + 3) - (n^2 + 5n + 10)}{n^2 + 5n + 10} \right| = \left| \frac{-12n + 7}{n^2 + 5n + 10} \right| =$$

(1 pont) Felhasználjuk, hogy $n^2 + 5n + 10 \geq 0$ és $-12n + 7 \leq 0$ ha $n \geq 1$:

$$= \frac{12n - 7}{n^2 + 5n + 10} \leq \frac{12n}{n^2 + 5n + 10} \leq \frac{12n}{n^2} = \frac{12}{n} < \varepsilon$$

(2 pont) Ebből $\frac{12}{\varepsilon} < n$, azaz $N(\varepsilon) = \min \left\{ \left\lceil \frac{12}{\varepsilon} \right\rceil + 1, 1 \right\}$ (ha az 1 hiányzik a végéről, az se baj). (1 pont)

2. Számítsa ki a következő sorozat határértékét! Válaszának minden lépését indokolja!

$$a_n = \frac{5^{n+1} + 2^{n+3}}{3^{2n+1}} \sin(n^2 - 1) - \sqrt[3]{3n^2 + 5n + 15}$$

Megoldás: Vizsgáljuk a két tagot külön-külön!

Az első tagban

$$\frac{5^{n+1} + 2^{n+3}}{3^{2n+1}} = \frac{5 \cdot 5^n + 8 \cdot 2^n}{3 \cdot 9^n} = \frac{9^n \left(5 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^n + 8 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^n\right)}{3 \cdot 9^n} = \frac{5}{3} \left(\frac{5}{9}\right)^n + \frac{8}{3} \left(\frac{2}{9}\right)^n \rightarrow 0 + 0 = 0.$$

(1,5 pont) Mivel $\sin(n^2 - 1)$ korlátos és nullába tartóval van szorozva, ezért

$$\frac{5^{n+1} + 2^{n+3}}{3^{2n+1}} \sin(n^2 - 1) \rightarrow 0.$$

(1 pont)

A második tagot rendőr elvvel oldhatjuk meg:

$$\sqrt[3]{3n^2 + 5n + 15} \leq \sqrt[3]{3n^2 + 5n^2 + 15n^2} = \sqrt[3]{23n^2} = \sqrt[3]{23}(\sqrt[3]{n})^2 \rightarrow 1,$$

$$\sqrt[3]{3n^2 + 5n + 15} \geq \sqrt[3]{3n^2} = \sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{n})^2 \rightarrow 1,$$

(2 pont) tehát az eredeti tag is az egyhez tart. (0,5 pont)

Összességében tehát $a_n \rightarrow 0 - 1 = -1$.

3. Folytonossá tehető-e az alábbi függvény az $x = 1$ és $x = 3$ pontokban? Ha igen, határozza meg a és b konstansok értékét úgy, hogy a függvény folytonos legyen az adott pontokban!

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} & \text{ha } x \neq 1, x \neq 3, \\ a & \text{ha } x = 1, \\ b & \text{ha } x = 3, \end{cases}$$

Megoldás: A függvény akkor tehető folytonossá az adott pontban, ha jobb- és baloldali határértékei léteznek és ezek egyenlők. (1 pont - kimondás nélkül, alkalmazás esetén is jár a pont)

Az $x = 1$ pontban:

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x+1}{x-1} = \infty.$$

(1 pont) A másik oldal hasonlóan:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} = \dots = -\infty.$$

(0,5 pont) Így nem tehető folytonossá a függvény. (0,5 pont)

Az $x = 3$ pontban:

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x+1}{x-1} = \frac{4}{2} = 2.$$

(1 pont) A másik oldal hasonlóan:

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} = \dots = 2.$$

(0,5 pont) Így $b = 2$ választással folytonossá tehető a függvény. (0,5 pont)

4. Számítsa ki az alábbi függvény deriváltfüggvényét!

$$f(x) = \operatorname{ch} \left(\frac{\cos(x) + 2}{x^2 + \pi} \right) + \operatorname{sh}(x)e^{x^3}$$

Megoldás:

$$f'(x) = \operatorname{sh} \left(\frac{\cos(x) + 2}{x^2 + \pi} \right) \frac{(-\sin(x))(x^2 + \pi) - (\cos(x) + 2)(2x)}{(x^2 + \pi)^2} + \operatorname{ch}(x)e^{x^2} + \operatorname{sh}(x)e^{x^3}(3x^2)$$

(1+2+2 pont)

- 5*. Legyen egy a_n sorozat n -edik eleme az a szám, amit úgy kapunk, hogy a nullát és egy tizedesvesszőt követően leírjuk a sorszámot. Azaz a sorozat tizedik eleme $a_{10} = 0,10$, az ötszázötvenkettedik eleme $a_{512} = 0,512$ és a kettőezer-huszonharmadik pedig $a_{2023} = 0,2023$. Konvergens lesz ez a sorozat? Ha igen, hova tart? Ha nem, miért nem?

Megoldás: A sorozat nem konvergens (1 pont - csak gondolkodásra utaló jelek esetén adjuk meg).

Az állítást indirekten bizonyíthatjuk. Tegyük fel, hogy a sorozat konvergál valamilyen A értékhez. Ez az A érték nem lehet a $[0,1, 1]$ intervallumon kívül, hiszen itt a sorozatnak nincsenek értékei. Tegyük fel tehát, hogy $A \in [0,1, 1]$. Ha ez valóban határértéke a sorozatnak, ez azt jelentené, hogy egy bizonyos küszöbindexet követően a sorozat minden eleme benne van az $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ intervallumban. Legyen például $\varepsilon = 0,01$, azaz egy bizonyos idő után a sorozat minden elemének az $(A - 0,01, A + 0,01)$ intervallumban kell lennie.

Ugyanakkor a sorozatból kiválasztható a konstans $0,1$ részsorozat, valamint az $1 - \frac{1}{10^n}$ részsorozat is, utóbbinak pedig minden eleme egyre közelebb kerül az 1-hez. Ezen két részsorozat közül az egyik biztosan "ki fog ugrálni" a már említett $(A - 0,01, A + 0,01)$ intervallumból, ezért a sorozat nem lesz konvergens. (4 pont - más, megfelelő indoklás is elfogadható!)