Matematika G1 Első PótZH

A csoport, megoldások

2023

A dolgozaton 5+5+5+5+5=25 pont szerezhető. Munkaidő: 70 perc.

1. Számítsa ki az alábbi sorozat határértékét! Adjon tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ küszöbindexet!

$$a_n = \frac{n^2 - 5n + 10}{n^2 + 7n + 3}$$

Megoldás: A határérték kiszámításához kiemelhetünk a számlálóból és a nevezőből is n^2-et:

$$\frac{n^2 - 5n + 10}{n^2 + 7n + 3} = \frac{n^2\left(1 - \frac{5}{n} + \frac{10}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{7}{n} + \frac{3}{n^2}\right)} = \frac{1 - \frac{5}{n} + \frac{10}{n^2}}{1 + \frac{7}{n} + \frac{3}{n^2}} \to \frac{1 - 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 1.$$

(1 pont) Itt tétellel is indokolhatunk (ha rendesen ki van mondva: polinomok főegyütthatói határozzák meg a határértéket).

Mivel $A = 1$, a vizsgálandó különbség:

$$\left|\frac{n^2 - 5n + 10}{n^2 + 7n + 3} - 1\right| = \left|\frac{(n^2 - 5n + 10) - (n^2 + 7n + 3)}{n^2 + 7n + 3}\right| = \left|\frac{-12n + 7}{n^2 + 7n + 3}\right| =$$

(1 pont) Felhasználjuk, hogy $n^2 + 7n + 3 \geq 0$ és $-12n + 7 \leq 0$ ha $n \geq 1$:

$$= \frac{12n - 7}{n^2 + 7n + 3} \leq \frac{12n}{n^2 + 7n + 3} \leq \frac{12n}{n^2} = \frac{12}{n} < \varepsilon$$

(2 pont) Ebből $\frac{12}{\varepsilon} < n$, azaz $N(\varepsilon) = \min\left\{\left[\frac{12}{\varepsilon}\right] + 1,\ 1\right\}$ (ha az 1 hiányzik a végéről, az se baj). (1 pont)

2. Számítsa ki a következő sorozat határértékét! Válaszának minden lépését indokolja!

$$a_n = \frac{2^{n+1} + 5^{n+3}}{3^{2n+2}} \sin(n^3 - n) - \sqrt[n]{2n^2 + 7n + 14}$$

Megoldás: Vizsgáljuk a két tagot külön-külön!

Az első tagban

$$\frac{2^{n+1} + 5^{n+3}}{3^{2n+2}} = \frac{2 \cdot 2^n + 125 \cdot 5^n}{9 \cdot 9^n} = \frac{9^n\left(2 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^n + 125 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^n\right)}{9 \cdot 9^n} = \frac{2}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^n + \frac{125}{9}\left(\frac{5}{9}\right)^n \to 0+0 = 0.$$

(1,5 pont) Mivel $\sin(n^3 - n)$ korlátos és nullába tartóval van szorozva, ezért

$$\frac{2^{n+1} + 5^{n+3}}{3^{2n+2}} \sin(n^3 - n) \to 0.$$

(1 pont)

A második tagot rendőr elvvel oldhatjuk meg:

$$\sqrt[n]{2n^2 + 7n + 14} \leq \sqrt[n]{2n^2 + 7n^2 + 14n^2} = \sqrt[n]{23n^2} = \sqrt[n]{23}(\sqrt[n]{n})^2 \to 1,$$

$$\sqrt[n]{2n^2 + 7n + 14} \geq \sqrt[n]{2n^2} = \sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^2 \to 1,$$

(2 pont) tehát az eredeti tag is az egyhez tart. (0,5 pont)

Összességében tehát $a_n \to 0 - 1 = -1$.

3. Folytonossá tehető-e az alábbi függvény az $x = 1$ és $x = 2$ pontokban? Ha igen, határozza meg a és b konstansok értékét úgy, hogy a függvény folytonos legyen az adott pontokban!

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2} & \text{ha } x \neq 1,\ x \neq 2, \\ a & \text{ha } x = 1, \\ b & \text{ha } x = 2, \end{cases}$$

Megoldás: A függvény akkor tehető folytonossá az adott pontban, ha jobb- és baloldali határértékei léteznek és ezek egyenlők. (1 pont - kimondás nélkül, alkalmazás esetén is jár a pont)

Az $x = 1$ pontban:

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1+0} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1+0} \frac{x+3}{x-2} = \frac{4}{-1} = -4.$$

(1 pont) A másik oldal hasonlóan:

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2} = \cdots = -4.$$

(0,5 pont) Így $a = -4$ választással folytonossá tehető a függvény. (0,5 pont)

Az $x = 2$ pontban:

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2+0} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 2+0} \frac{x+3}{x-2} = +\infty.$$

(1 pont) A másik oldal hasonlóan:

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2} = \cdots = -\infty.$$

(0,5 pont) Így nem tehető folytonossá a függvény. (0,5 pont)

4. Számítsa ki az alábbi függvény deriváltfüggvényét!

$$f(x) = \operatorname{sh}\left(\frac{\sin(x)+1}{x^3+\pi}\right) + \operatorname{ch}(x)e^{x^2}$$

Megoldás:

$$f'(x) = \operatorname{ch}\left(\frac{\sin(x)+1}{x^3+\pi}\right) \frac{\cos(x)(x^3+\pi) - (\sin(x)+1)(3x^2)}{(x^3+\pi)^2} + \operatorname{sh}(x)e^{x^2} + \operatorname{ch}(x)e^{x^2}(2x)$$

(1+2+2 pont)

5*. Legyen egy a_n sorozat n-edik eleme az a szám, amit úgy kapunk, hogy az elem sorszámában a legnagyobb helyi értéken álló számjegy után beírunk egy tizedesvesszőt. Azaz a sorozat tizedik eleme $a_{10} = 1{,}0$, az ötszáztizenkettedik eleme $a_{512} = 5{,}12$ és a kettőezer-huszonharmadik pedig $a_{2023} = 2{,}023$. Konvergens lesz ez a sorozat? Ha igen, hova tart? Ha nem, miért nem?

Megoldás: A sorozat nem konvergens (1 pont - csak gondolkodásra utaló jelek esetén adjuk meg).

Az állítást indirekten bizonyíthatjuk. Tegyük fel, hogy a sorozat konvergál valamilyen A értékhez. Ez az A érték nem lehet a $[1{,}10]$ intervallumon kívül, hiszen itt a sorozatnak nincsenek értékei. Tegyük fel tehát, hogy $A \in [1{,}10]$. Ha ez valóban határértéke a sorozatnak, ez azt jelentené, hogy egy bizonyos küszöbindexet követően a sorozat minden eleme benne van az $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ intervallumban. Legyen például $\varepsilon = 0{,}1$, azaz egy bizonyos idő után a sorozat minden elemének az $(A-0{,}1, A+0{,}1)$ intervallumban kell lennie.

Ugyanakkor a sorozatból kiválasztható a konstans 1 részsorozat, valamint a $10 - \dfrac{1}{10^n}$ részsorozat is, utóbbinak pedig minden eleme egyre közelebb kerül az 10-hez. Ezen két részsorozat közül az egyik biztosan "ki fog ugrálni" a már említett $(A-0{,}1, A+0{,}1)$ intervallumból, ezért a sorozat nem lesz konvergens. (4 pont - más, megfelelő indoklás is elfogadható!)