Matematika G1 Második PótZH

B csoport, megoldások

2023

A dolgozaton 5+5+5+5+5=25 pont szerezhető. Munkaidő: 70 perc.

1. Deriválja az alábbi függvényt!
$$f(x) = \ln(x)^{\cos(x)}$$

Megoldás: Használva a tanult átalakítást:

$$\ln(x)^{\cos(x)} = e^{\ln\left(\ln(x)^{\cos(x)}\right)} = e^{\cos(x)\ln(\ln(x))}$$

(1 pont) Így tehát

$$\left(\ln(x)^{\cos(x)}\right)' = \left(e^{\cos(x)\ln(\ln(x))}\right)' = e^{\cos(x)\ln(\ln(x))}\left((-\sin(x))\ln(\ln(x)) + \cos(x)\frac{1}{\ln(x)}\frac{1}{x}\right)$$

(1+1+2 pont)

2. Adja meg az alábbi függvény esetében az értelmezési tartományt, majd azokat az intervallumokat, ahol a függvény konvex ill. konkáv! Melyek a függvény inflexiós pontjai?
$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 5$$

Megoldás: A függvény deriváltjai:

$$f'(x) = \left(-x^3 + 3x^2 + x - 5\right)' = -3x^2 + 6x + 1,$$

$$f''(x) = \left(-3x^2 + 6x + 1\right)' = -6x + 6,$$

(1 pont) Ez akkor lehet nulla, ha $-6x+6=0$ azaz $x=1$, illetve további kritikus pont nincs, mert $f(x)$ mindenhol értelmes. (1 pont)

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	pozitív	0	negatív
$f(x)$	konvex	inf. pont	konkáv

(oszloponként 1 pont)

3. Adjuk meg az alábbi, paraméteresen megadott görbe érintőjének egyenletét a $t_0 = \pi/2$ pontban!
$$\begin{cases} x(t) = e^{3t}\sin(t) \\ y(t) = e^{3t}\cos(t) \end{cases}$$

Megoldás: Az érintőhöz szükségünk lesz a $t_0 = \pi/2$ pontbeli derivált értékére - ehhez a koordinátafüggvények deriváltjai:

$$x'(t) = \left(e^{3t}\sin(t)\right)' = 3e^{3t}\sin(t) + e^{3t}\cos(t).$$

$$y'(t) = \left(e^{3t}\cos(t)\right)' = 3e^{3t}\cos(t) + e^{3t}(-\sin(t))$$

(2 pont) Így a derivált:

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3e^{3t}\cos(t) + e^{3t}(-\sin(t))}{3e^{3t}\sin(t) + e^{3t}\cos(t)} = \frac{3\cos(t) - \sin(t)}{3\sin(t) + \cos(t)}$$

Behelyettesítve a $t_0 = \pi/2$ értéket kapjuk, hogy a derivált

$$\frac{0-1}{3+0} = -\frac{1}{3}.$$

(1 pont) A további két szükséges érték:

$$x(t_0) = e^{3\pi/2} \cdot 1 = e^{3\pi/2}$$

$$y(t_0) = e^{3\pi/2} \cdot 0 = 0$$

(1 pont) Így az érintő egyenlete:

$$y - 0 = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(x + e^{3\pi/2}\right),$$

(1 pont) azaz $y = -\frac{x}{3} + \frac{e^{3\pi/2}}{3}$.

4. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrált!

$$\int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx$$

Megoldás: A nevező felírható $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ alakban (1 pont), így a törtekre bontás:

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x+2)}{(x+2)(x-1)},$$

(1 pont) tehát a megoldandó egyenlet

$$1 = A(x-1) + B(x+2),$$

Az így kapott két egyenlet:

$$\begin{aligned} 0 =& A + B \\ 1 =& -A + 2B. \end{aligned}$$

(1 pont) Az elsőből $A = -B$, így tehát a másodikból $1 = 3B$ tehát $B = \frac{1}{3}$ azaz $A = -\frac{1}{3}$. (1 pont) Így tehát az integrál:

$$\int \frac{1}{x^2+x-2} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{x+2} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1} dx = -\frac{1}{3} \ln(|x+2|) + \frac{1}{3} \ln(|x-1|) + c.$$

(1 pont)

5*. Az $f(x) = x - e\ln(x)$ képlettel definiált f függvény tanulmányozásával mutassuk meg, hogy

$$e^4 > 4^e.$$

(Segítő kérdés: mennyi $f(e)$ értéke és mi f' előjele az (e, ∞) tartományon? További segítség: $e \approx 2{,}7183$.)

Megoldás: Használva a segítséget

$$f(e) = e - e\ln(e) = e - e = 0,$$

(1 pont) továbbá

$$f'(x) = 1 - e\frac{1}{x}.$$

Ha $x > e$, akkor $\frac{1}{x} < \frac{1}{e}$, tehát ekkor $0 < e\frac{1}{x} < 1$ és így $0 < f'(x) < 1$ azaz f' pozitív, tehát f növekszik. (1 pont) Mivel $f(e) = 0$, így $f(x) > 0$ ha $x > e$. (1 pont)

Véve a bizonyítandó egyenlőtlenség mindkét oldalából logaritmust:

$$4\ln(e) > e\ln(4),$$

$$4 - e\ln(4) > 0,$$

(1 pont) és ez igaz, hiszen a bal oldal $f(4)$, ami pozitív az előző érvelés alapján. (1 pont)