Matematika G1 Második PótZH

A csoport, megoldások

2023

A dolgozaton 5+5+5+5+5=25 pont szerezhető. Munkaidő: 70 perc.

1. Deriválja az alábbi függvényt!
$$f(x) = \ln(x)^{\sin(x)}$$

   Megoldás: Használva a tanult átalakítást:
$$\ln(x)^{\sin(x)} = e^{\ln\left(\ln(x)^{\sin(x)}\right)} = e^{\sin(x)\ln(\ln(x))}$$

   (1 pont) Így tehát
$$\left(\ln(x)^{\sin(x)}\right)' = \left(e^{\sin(x)\ln(\ln(x))}\right)' = e^{\sin(x)\ln(\ln(x))}\left(\cos(x)\ln\left(\ln(x)\right) + \sin(x)\frac{1}{\ln(x)}\frac{1}{x}\right)$$

   (1+1+2 pont)

2. Adja meg az alábbi függvény esetében az értelmezési tartományt, majd azokat az intervallumokat, ahol a függvény konvex ill. konkáv! Melyek a függvény inflexiós pontjai?
$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$$

   Megoldás: A függvény deriváltjai:
$$f'(x) = \left(x^3 + 2x^2 - x + 1\right)' = 3x^2 + 4x - 1,$$
$$f''(x) = \left(3x^2 + 4x - 1\right)' = 6x + 4,$$

   (1 pont) Ez akkor lehet nulla, ha $6x+4=0$ azaz $x = -\frac{2}{3}$, illetve további kritikus pont nincs, mert $f(x)$ mindenhol értelmes. (1 pont)

x	$\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$
$f'(x)$	negatív	0	pozitív
$f(x)$	konkáv	inf. pont	konvex

   (oszloponként 1 pont)

3. Adjuk meg az alábbi, paraméteresen megadott görbe érintőjének egyenletét a $t_0 = \pi/2$ pontban!
$$\begin{cases} x(t) = e^{2t}\cos(t) \\ y(t) = e^{2t}\sin(t) \end{cases}$$

   Megoldás: Az érintőhöz szükségünk lesz a $t_0 = \pi/2$ pontbeli derivált értékére - ehhez a koordinátafüggvények deriváltjai:
$$x'(t) = \left(e^{2t}\cos(t)\right)' = 2e^{2t}\cos(t) + e^{2t}(-\sin(t)).$$
$$y'(t) = \left(e^{2t}\sin(t)\right)' = 2e^{2t}\sin(t) + e^{2t}\cos(t)$$

   (2 pont) Így a derivált:
$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2e^{2t}\sin(t) + e^{2t}\cos(t)}{2e^{2t}\cos(t) + e^{2t}(-\sin(t))} = \frac{2\sin(t) + \cos(t)}{2\cos(t) - \sin(t)}$$

Behelyettesítve a $t_0 = \pi/2$ értéket kapjuk, hogy a derivált

$$\frac{2+0}{0-1} = -2.$$

(1 pont) A további két szükséges érték:

$$x(t_0) = e^{\pi} \cdot 0 = 0$$

$$y(t_0) = e^{\pi} \cdot 1 = e^{\pi}$$

(1 pont) Így az érintő egyenlete:

$$y - e^{\pi} = (-2)\,(x-0)\,,$$

(1 pont) azaz $y = -2x + e^{\pi}$.

4. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrált!

$$\int \frac{1}{x^2 - x - 2} dx$$

Megoldás: A nevező felírható $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ alakban (1 pont), így a törtekre bontás:

$$\frac{1}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)},$$

(1 pont) tehát a megoldandó egyenlet

$$1 = A(x+1) + B(x-2),$$

Az így kapott két egyenlet:

$$\begin{aligned} 0 =& A + B \\ 1 =& A - 2B. \end{aligned}$$

(1 pont) Az elsőből $A = -B$, így tehát a másodikból $1 = -3B$ tehát $B = -\frac{1}{3}$ azaz $A = \frac{1}{3}$.
(1 pont) Így tehát az integrál:

$$\int \frac{1}{x^2-x-2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{3} \ln(|x-2|) - \frac{1}{3} \ln(|x+1|) + c.$$

(1 pont)

5*. Az $f(x) = x - e\ln(x)$ képlettel definiált f függvény tanulmányozásával mutassuk meg, hogy

$$e^3 > 3^e.$$

(Segítő kérdés: mennyi $f(e)$ értéke és mi f' előjele az (e, ∞) tartományon? További segítség: $e \approx 2{,}7183$.)

Megoldás: Használva a segítséget

$$f(e) = e - e\ln(e) = e - e = 0,$$

(1 pont) továbbá

$$f'(x) = 1 - e\frac{1}{x}.$$

Ha $x > e$, akkor $\frac{1}{x} < \frac{1}{e}$, tehát ekkor $0 < e\frac{1}{x} < 1$ és így $0 < f'(x) < 1$ azaz f' pozitív, tehát f növekszik. (1 pont) Mivel $f(e) = 0$, így $f(x) > 0$ ha $x > e$. (1 pont)
Véve a bizonyítandó egyenlőtlenség mindkét oldalából logaritmust:

$$3\ln(e) > e\ln(3),$$

$$3 - e\ln(3) > 0,$$

(1 pont) és ez igaz, hiszen a bal oldal $f(3)$, ami pozitív az előző érvelés alapján. (1 pont)